Tentamen Combinatorische Groepentheorie (kans A)

Opgave 1. *(8 punten)*
Zij $F = F(x, y)$ de vrije groep van rang 2.

(i) Laat zien dat ook $S' = \{x, xy\}$ en $S'' = \{x, x^2y\}$ bases zijn voor F.

(ii) Leg uit dat F oneindig veel verschillende bases heeft.

(iii) Geef een automorfisme α van F aan dat eindige orde heeft en een automorfisme β van F dat oneindige orde heeft.

Oplossing:

(i) Het is duidelijk dat S' en S'' ondergroepen van F voortbrengen. Maar wegens $y = x^{-1}(xy)$ en $y = x^{-2}(x^2y)$ is $F \subseteq \langle S' \rangle$ en $F \subseteq \langle S'' \rangle$ dus is $F = \langle S' \rangle = \langle S'' \rangle$.

Zij $z_1 = xy$ en $z_2 = x^2y$. De homomorfismen $\varphi_1 : F(x, y) \to F(x, z_1), x \mapsto x, y \mapsto xy = z_1$ en $\psi_1 : F(x, z_1) \to F(x, y), x \mapsto x, z_1 \mapsto x^{-1}z_1 = y$ zijn wederzijds inversen en beelden dus een basis af op een basis. Hetzelfde geldt voor de homomorfismen $\varphi_2 : F(x, y) \to F(x, z_2), x \mapsto x, y \mapsto x^2y = z_2$ en $\psi_2 : F(x, z_2) \to F(x, y), x \mapsto x, z_2 \mapsto x^{-2}z_2 = y$.

(ii) Met hetzelfde argument als in deel (i) is $S^{(n)} = \{x, x^ny\}$ een basis van F, want $y = x^{-n}(x^ny)$.

Natuurlijk laat zich ook expliciet aantonen dat F vrij is op $S^{(n)}$. Omdat we al hebben laten zien dat F voortgebracht is door $S^{(n)}$, hoeven we alleen nog aan te tonen dat voor $z = x^ny$ geen gereduceerd woord in $x^{\pm 1}$ en $z^{\pm 1}$ het eenheidselement geeft. Maar de enige manier hoe in zo'n woord y kan wegvallen is, door z en z^{-1} naast elkaar te hebben, en dan is het woord niet gereduceerd. Een gereduceerd woord zonder y is een macht van x en dus ook niet het eenheidselement.

(iii) De afbeelding $\alpha : x \mapsto y, y \mapsto x$ is een automorfisme van orde 2 van F.

De afbeelding $\beta : x \mapsto x, y \mapsto xy$ is een automorfisme van oneindige orde, want $\beta^n(x) = x$, $\beta^n(y) = x^ny$.

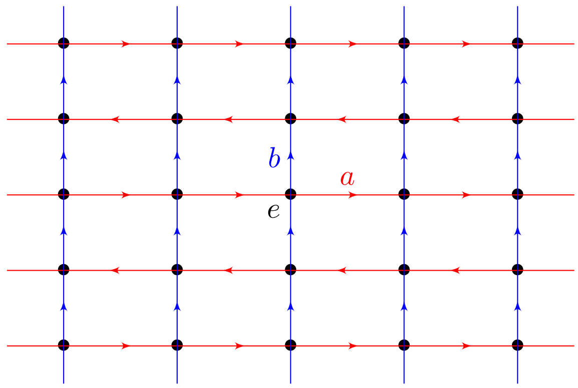
Opgave 2. *(10 punten)*
Zij G de groep met presentatie $G = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

(i) Geef een deel aan van de Cayley graaf van G (met betrekking tot $S = \{a, b\}$) met minstens alle knopen die afstand 1 of 2 hebben van het eenheidselement.

(ii) Bewijs dat G geen elementen van eindige orde bevat (behalve het eenheidselement).

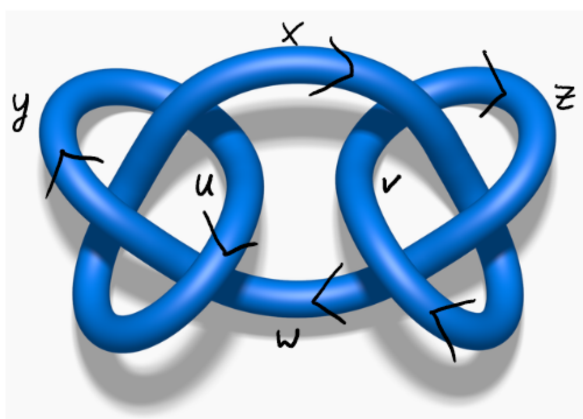
Oplossing:

(i) Uit de presentatie volgt dat $ba = a^{-1}b$, en dus ook $b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$, $ba^{-1} = ab$ en $b^{-1}a^{-1} = ab^{-1}$, hieruit laat zich de Cayley graaf construëren. Deze lijkt sterk op de Cayley graaf van $\mathbb{Z}^2$, alleen dat de richting van de horizontale lijnen steeds omwisselt.



(ii) Uit de in (i) afgeleide relaties volgt dat zich ieder element van G laat herschrijven als $a^k b^l$ met $k, l \in \mathbb{Z}$. Bij het verruilen van $b^{\pm}$ met $a^{\pm}$ blijft de macht van b onveranderd (terwijl die van a juist omklapt). Hieruit volgt dat $(a^k b^l)^n = a^{k'} b^{nl}$ en voor $l \neq 0$ is dit niet het eenheidselement. Voor $l = 0$ is duidelijk dat a^k geen element van eindige orde is (zie bijvoorbeeld de Cayley graaf).

Opgave 3. *(10 punten)*
De hieronder afgebeelde knoop ontstaat door twee klaverbladknopen te koppelen.



(i) Bepaal de Wirtinger presentatie van de knoopgroep $G(\mathcal{K}) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K})$ van deze knoop.

NB: Gebruik bij voorkeur de in de afbeelding aangegeven labels voor de strengen, anders wordt het nakijken erg lastig.

(ii) Ga na dat $x = w$ geldt voor de voortbrengers van de betreffende strengen.

Leid hiermee af dat zich de Wirtinger presentatie laat vereenvoudigen tot de presentatie $\langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz \rangle$.

Oplossing:

(i) We beginnen boven in het midden en volgen het touw in de aangegeven richting. De kruispunten geven dan de relaties:
$xz = vx \Rightarrow v = xzx^{-1}$,
$zv = xz \Rightarrow zxzx^{-1} = xz$,
$vw = zv$,
$uw = yu$,
$yu = xy \Rightarrow u = y^{-1}xy$,
$xy = ux \Rightarrow xy = y^{-1}xyx$.
De Wirtinger presentatie is dus

$$G(\mathcal{K}) = \langle x, y, z, u, v, w \mid xz = vx, zv = xz, vw = zv, uw = yu, yu = xy, xy = ux \rangle.$$

(ii) Uit de eerste drie relaties (van beneden naar boven) lezen we af dat $vw = zv = xz = vx$ en dus $w = x$.

Middels de eerste relatie elimineren we v, dan geeft de tweede relatie $zxz = xzx$. Middels de vijfde relatie elimineren we u, dan geeft de zesde relatie $yxy = xyx$. De vierde relatie is redundant, want uit $uw = yu = xy = ux$ volgt wegens $w = x$ gewoon $u = u$.

We vinden zo de vereenvoudigde presentatie $\langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz \rangle$ voor $G(\mathcal{K})$.

Opgave 4. *(10 punten)*
Zij $F = F(x, y)$ de vrije groep van rang 2.

(i) Laat zien dat F voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een normaaldeler H van index n heeft met $F/H \cong \mathbb{Z}_n$.

(ii) Geef een Schreier transversaal T aan voor H in F en bepaal de corresponderende Schreier voortbrengers voor H.

Oplossing:

(i) Zij $\mathbb{Z}_n = \langle a \rangle$ een cyklische groep van orde n. De afbeelding $x \mapsto a, y \mapsto 1$ laat zich voortzetten naar een eenduidig homomorfisme $\varphi : F \to \mathbb{Z}_n$. Deze is duidelijk surjectief, dus is $H = \ker \varphi$ een normaaldeler van F met $F/H \cong \mathbb{Z}_n$.

(ii) Een Schreier transversaal van H in F is $T = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$.

Voor $t \in T$ en $s \in S = \{x, y\}$ is $\overline{x^i\, x} = x^{i+1}$ voor $i < n-1$, $\overline{x^{n-1}\, x} = e$, en $\overline{x^i\, y} = x^i$ voor $i \leq n-1$. De Schreier voortbrengers zijn de niet-triviale elementen $ts\overline{ts}^{-1}$ en dit zijn x^n en $x^i y x^{-i}$ voor $0 \leq i \leq n-1$.

Opgave 5. *(6 punten)*
Laten G en H twee niet-triviale groepen zijn en zij $G * H$ hun vrij product.
Bewijs dat het centrum $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ voor alle } w \in G * H\}$ van $G * H$ triviaal is.

Oplossing: Zij $w \in Z(G * H)$, dan laat zich w schrijven als gereduceerd woord van de vorm $w = g_1 h_1 \ldots$ met $g_1 \in G \setminus \{e\}$ of van de vorm $w = h_1 g_1 \ldots$ met $h_1 \in H \setminus \{e\}$.
Voor w van de eerste vorm zou moeten gelden dat $hw = wh$ voor iedere $h \in H$. Maar voor $h \neq e$ is $hw = hg_1h_1 \ldots$ dan ook een gereduceerd woord en kan alleen gelijk zijn aan $wh = g_1h_1 \ldots h$ als w het lege woord is. Voor w van de tweede vorm werkt hetzelfde argument voor $gw = wg$ met $g \in G$.