Tentamen Operations Research (kans A)

Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student. Zo nodig zal de zaak worden doorverwezen naar de examencommissie.

Upload aan het begin van het tentamen de verklaring dat je alleen de toegelaten hulpmiddelen gaat gebruiken.

Vergeet niet je uitwerkingen vóór het uploaden met je naam te voorzien en duidelijk te nummeren zo dat het ingeleverde werk in een zinvolle volgorde gebracht kan worden.

Opgave 1. *(8 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

$$\text{maximaliseer } (-4x_1 - 2x_2 - 3x_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 2 \end{array} \text{ met } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(i) Bepaal middels het Simplex algoritme een optimale oplossing van dit LP-probleem.

(ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

(iii) Zijn de oplossingen van het originele LP-probleem en van het duale probleem eenduidig? Licht je antwoord toe.

Oplossing:

(i) We voegen voor de eerste ongelijkheid een slack variabele x_4 toe, voor de tweede vergelijking een hulpvariabele y_1 en voor de derde ongelijkheid een overschotvariabele x_5 en een hulpvariabele y_2. Met de te maximaliseren hulpfunctie $-y_1 - y_2$ en de originele doelfunctie krijgen we het volgende tableau dat we in een eerste stap naar een *tbo* voor de hulpfunctie transformeren en vervolgens de hulpfunctie optimaliseren.

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & x_5 & y_2 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \boxed{2} & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \end{array}$$

Hiermee is het hulpprobleem opgelost, en we vinden de initiële oplossing $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$ van het originele LP-probleem. Echter is de originele doelfunctie op alle niet-basisvariabelen (x_2 en x_5) negatief, dus is dit al een optimale oplossing. De optimale waarde van de doelfunctie is dus $-\frac{15}{2}$.

(ii) Het duale probleem is

$$\text{minimaliseer } (4y_1 + y_2 + 2y_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} y_1 + y_2 + y_3 & \geq & -4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 & \geq & -2 \\ y_1 - y_2 + y_3 & \geq & -3 \end{array} \text{ voor } y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \leq 0.$$

Volgens complementaire slackheid zijn wegens $x_1, x_3 > 0$ voor de gevonden optimale oplossing de eerste en derde ongelijkheid van het duale probleem scherp. Verder is de eerste ongelijkheid van het primale probleem niet scherp ($\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 < 4$), daarom is $y_1 = 0$.
Hieruit volgt dat $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dus

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Voor de oplossing $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = -\frac{7}{2}$ heeft de doelfunctie van het duale probleem inderdaad de waarde $-\frac{15}{2}$.

Alternatief laat het duale probleem zich natuurlijk ook met het Simplex algoritme oplossen. Hiervoor is het handig het stelsel $A^{tr} y \geq c$ te vervangen door $-A^{tr} y \leq -c$ en als doelfunctie $-4y_1 - y_2 - 2y_3$ te maximaliseren. Verder wordt de variabele $y_3 \leq 0$ vervangen door $y_3' = -y_3 \geq 0$ en de vrije variabele y_2 opgesplitst in $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ met $y_2^+, y_2^- \geq 0$.

Het begintableau wordt dan

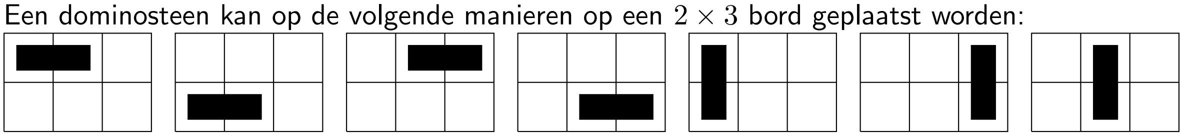
y_1	y_2^+	y_2^-	y_3'	y_4	y_5	y_6	
-1	-1	1	1	1	0	0	4
1	-1	1	-1	0	1	0	2
-1	1	-1	1	0	0	1	3
-4	-1	1	2	0	0	0	0

.

(iii) De oplossing van het primale probleem is eenduidig omdat de getransformeerde doelfunctie bij alle niet-basisvariabelen negatief is.

De oplossing van het duale probleem is dan eenduidig volgens complementaire slackheid, want $y_1 = 0$ ligt vast en de deelmatrix voor de scherpe randvoorwaarden is inverteerbaar.

Opgave 2. *(7 punten)*
Een dominosteen kan op de volgende manieren op een 2×3 bord geplaatst worden:



De eerste speler plaatst (verborgen voor de tweede speler) een dominosteen op het bord, de tweede speler kiest één van de zes velden van het bord.
Als het gekozen veld van de dominosteen overdekt wordt, wint de tweede speler het spel, als niet wint de eerste speler.

(i) Geef de volledige 7×6-matrix aan die dit spel als twee-personen matrixspel beschrijft.

(ii) Uit symmetrieredenen zijn er voor de eerste speler slechts drie essentieel verschillende manieren de dominosteen te plaatsen, en zijn er voor de tweede speler slechts twee essentieel verschillende manieren een veld te kiezen.

Laat zien dat zich de matrix van het spel op basis van deze symmetrieredenen laat reduceren naar de 3×2-matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Bepaal voor beide spelers *alle* optimale strategieën voor het spel m.b.t. de gereduceerde matrix uit deel (ii).

Wat is de waarde van het spel?

Oplossing:

(i) We hanteren de plaatsing van de dominosteen in de volgorde zo als boven aangegeven.

Voor het kiezen van het veld nummeren we de velden op de volgende manier:

1	2	3
4	5	6

De matrix van het spel is dan $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) De eerste vier manieren de dominosteen te plaatsen zijn symmetrieequivalent, net zo als de volgende twee. Bij de velden zijn de vier hoekvelden equivalent en de twee velden in het midden. Om de gereduceerde matrix te bepalen, hoeven we voor een representant voor de plaatsing van de dominosteen alleen te bepalen wat de verschillende manieren een veld te kiezen gemiddeld opleveren. Omgekeerd kunnen we ook voor een representant voor de keuze van een veld nagaan wat de verschillende equivalente plaatsingen van een dominosteen gemiddeld opleveren.

Dominosteen $[1, 2]$: hoekvelden $1, 3, 4, 6$ leveren winst $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ voor de eerste speler op, gemiddeld dus $\frac{1}{2}$. Alternatief leveren voor hoekveld 1 de dominostenen $[1, 2]$, $[4, 5]$, $[2, 3]$, $[5, 6]$ winst $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ voor de eerste speler op.

Dominosteen $[1, 2]$: middenvelden $2, 5$ leveren winst $-1 + 1 = 0$ op.

Dominosteen $[1, 4]$: hoekvelden $1, 3, 4, 6$ leveren winst $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$ voor de eerste speler op.

Dominosteen $[1, 4]$: middenvelden $2, 5$ leveren winst $1 + 1 = 2$ voor de eerste speler op, gemiddeld dus 1.

Dominosteen $[2, 5]$: hoekvelden $1, 3, 4, 6$ leveren winst $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ voor de eerste speler op, gemiddeld dus 1.

Dominosteen $[2,5]$: middenvelden $2,5$ leveren winst $-1-1=-2$ voor de eerste speler op, gemiddeld dus -1.

Dit geeft de aangegeven gereduceerde matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) De tweede speler kiest met kans q een hoekveld en met kans $1-q$ een middenveld, dan is $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q \\ 1-q \\ 2q-1 \end{pmatrix}$. Het maximum hiervan moet zo klein mogelijk zijn, hiervoor stellen we twee van de componenten gelijk aan elkaar. Uit $1-q=2q-1$ volgt $q=\frac{2}{3}$ en voor deze q zijn in feite alle drie componenten gelijk aan $\frac{1}{3}$. Dit is dus de eenduidige optimale strategie voor de tweede speler en laat zien dat het spel de waarde $\frac{1}{3}$ heeft (en dus niet eerlijk is).

Voor de strategie van de eerste speler berekenen we $(p_1, p_2, 1-p_1-p_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \big(1-\frac{1}{2}p_1-p_2, p_1+2p_2-1\big)$. Gelijk aan elkaar stellen van de componenten geeft $\frac{3}{2}p_1+3p_2=2$ of $p_1+2p_2=\frac{4}{3}$ (dit volgt ook uit $p_1+2p_2-1=\frac{1}{3}$). Voor een toegelaten strategie moet natuurlijk gelden dat $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ en $0 \leq p_1+p_2 \leq 1$. Hieruit volgt dat de optimale strategieën van de eerste speler gegeven zijn door (p_1,p_2,p_3) met $p_1 \in [0, \frac{2}{3}]$, $p_2 = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}p_1$ en $p_3 = 1-p_1-p_2 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}p_1$.

Dat het spel de waarde $\frac{1}{3}$ heeft is ook intuïtief duidelijk, want de kans een overdekt veld te kiezen is gewoon $\frac{1}{3}$, d.w.z. gemiddeld wint de eerste speler in 2 van 3 spelen en de tweede speler in 1 van 3 spelen, de verwachte nettowinst van de eerste speler is dus 1 uit 3 spelen.

Opgave 3. *(6 punten)*
Voor de primale en duale problemen

(P) $\min c^{tr}x$ voor $x \geq 0$ met $Ax \geq b$ en (D) $\max b^{tr}y$ voor $y \geq 0$ met $A^{tr}y \leq c$

is het bijhorende homogene Goldman-Tucker systeem gegeven door

$$\text{(H)} \quad \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^{tr} & 0 & c \\ b^{tr} & -c^{tr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ \kappa \end{pmatrix} \geq 0 \text{ voor } x, y, \kappa \geq 0.$$

Zij verder $\rho := \rho(x,y) = b^{tr}y - c^{tr}x$ de slack variabele van de laatste ongelijkheid in (H).

Bewijs dat (H) geen oplossing heeft met $\kappa > 0$ en $\rho > 0$ en dat precies één van de volgende twee alternatieven geldt:

(1) Er is een oplossing van (H) met $\kappa > 0$ en $\rho = 0$.
In dit geval zijn $\frac{1}{\kappa}x$ en $\frac{1}{\kappa}y$ optimale oplossingen van (P) en (D).

(2) Er is een oplossing van (H) met $\rho > 0$ en $\kappa = 0$.
In dit geval is (P) ontoelaatbaar of (D) ontoelaatbaar.

Hint: Gebruik (een geschikte versie van) het Farkas lemma om te laten zien dat er in het geval $\kappa = 0$ een oplossing is met $\rho > 0$.

Oplossing: Stel er is een oplossing $(y,x,\kappa)^{tr}$ van (H) met $\kappa > 0$. Dan is ook $(\frac{1}{\kappa}y, \frac{1}{\kappa}x, 1)^{tr}$ een oplossing van (H) en $\frac{1}{\kappa}x$ en $\frac{1}{\kappa}y$ zijn oplossingen van (P) en (D).

Wegens zwakke dualiteit geldt voor oplossingen x en y van (P) en (D) dat $b^{tr}y \leq c^{tr}x$, dus volgt uit de laatste ongelijkheid van (H) dat $b^{tr}y = c^{tr}x$ en dus $\rho = 0$. In dit geval zijn $\frac{1}{\kappa}x$ en $\frac{1}{\kappa}y$ optimale oplossingen van (P) en (D).

Stel nu dat voor alle oplossingen van (H) geldt dat $\kappa = 0$. Als (P) en (D) beide oplosbaar zijn, is er een oplossing van (H) met $\kappa = 1$, dus weten we dat voor $\kappa = 0$ één van (P) en (D) ontoelaatbaar is, de andere is dan onbegrensd of ook ontoelaatbaar.

Om te zien dat er een oplossing van (H) is met $\rho > 0$ gebruiken we nu de tweede versie van het Farkas lemma: precies één van $Ax \leq b, x \geq 0$ en $A^{tr}y \geq 0, y \geq 0, b^{tr}y < 0$ is oplosbaar.

Stel (P) is niet oplosbaar, d.w.z. $-Ax \leq -b, x \geq 0$ heeft geen oplossing. Dan is er volgens het Farkas lemma een $y \geq 0$ met $-A^{tr}y \geq 0$ en $-b^{tr}y < 0$, dus $A^{tr}y \leq 0$ en $b^{tr}y > 0$. Dan is $(y, 0, 0)^{tr}$ een oplossing van (H) met $\rho = b^{tr}y > 0$.

Stel (D) is niet oplosbaar, d.w.z. $A^{tr}y \leq c, y \geq 0$ heeft geen oplossing. Dan is er volgens het Farkas lemma een $x \geq 0$ met $Ax \geq 0$ en $c^{tr}x < 0$. Dan is $(0, x, 0)^{tr}$ een oplossing van (H) met $\rho = -c^{tr}x > 0$.