Tentamen Operations Research

Opgave 1. *(7 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

$$\text{maximaliseer } (-2x_1 + 4x_2 - 3x_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & 1 \\ x_2 + 2x_3 & \geq & 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 1 \end{array} \text{ en } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(i) Formuleer dit LP-probleem in standaardvorm.

(ii) Bepaal middels de simplex methode een optimale oplossing van dit LP-probleem. Is deze oplossing uniek?

(iii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en laat zien dat de optimale oplossing van het duale probleem uniek is.

Merk op: Het is niet nodig een optimale oplossing van het duale probleem aan te geven.

Oplossing:

(i) Om het probleem in standaardvorm te schrijven moeten de eerste twee ongelijkheden met -1 vermenigvuldigd worden:

$$\text{maximaliseer } (-2x_1 + 4x_2 - 3x_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & -1 \\ -x_2 - 2x_3 & \leq & -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 1 \end{array} \text{ en } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(ii) Omdat niet alle rechterzijden niet-negatief zijn passen we de Fase I - Fase II methode toe. Hiervoor voeren we slackvariabelen x_4, x_5, x_6 in en een schijnvariabele y, dit geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad - y & = & -1 \\ -x_2 - 2x_3 \qquad + x_5 \qquad - y & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 - y & = & 1 \end{array}$$

De doelfunctie van het hulpprobleem is $\min y$ of $\max -y$. Tijdens het oplossen van het hulpprobleem transformeren we voor het gemak de doelfunctie van het originele probleem mee.

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrrrr|r} -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{ccccccc|c}
-1 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-2 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 3
\end{array}
$$

Hieruit laat zich de beginoplossing $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_6 = 2$ (en $x_1 = x_2 = x_5 = 0$) aflezen en we lossen nu het originele LP-probleem op. De schijnvariabele y en de doelfunctie van het hulpprobleem laten we vanaf nu natuurlijk weer weg.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
-1 & \boxed{\frac{5}{2}} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\
\hline
-2 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 3
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
-\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
\frac{1}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \\
\boxed{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 3
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{21}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{5}
\end{array}
$$

Hieruit lezen we de optimale oplossing $x_1 = 1$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.8$ van het LP-probleem af, de maximale waarde van de doelfunctie is -2.8.

Deze oplossing is uniek, want in de getransformeerde doelfunctie zijn alle coëfficiënten bij de niet-basisvariabelen negatief.

(iii) Het duale probleem is

$$
\text{minimaliseer } (y_1 + 2y_2 + y_3) \text{ voor }
\begin{array}{rcl}
y_1 \qquad + y_3 & \geq & -2 \\
-2y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 4 \\
y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq & -3
\end{array}
\quad \text{en } y_1, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0
$$

voor het LP-probleem in de oorspronkelijke vorm of

$$
\text{minimaliseer } (-y_1 - 2y_2 + y_3) \text{ voor }
\begin{array}{rcl}
-y_1 \qquad + y_3 & \geq & -2 \\
2y_1 - y_2 + 2y_3 & \geq & 4 \\
-y_1 - 2y_2 - y_3 & \geq & -3
\end{array}
\quad \text{en } y_1, y_2, y_3 \geq 0
$$

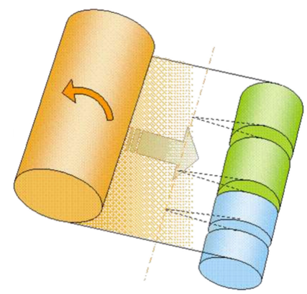
voor het LP-probleem in standaardvorm.

Omdat in de optimale oplossing van het originele probleem geldt dat $x_1, x_2, x_3 > 0$ is, voldoet volgens complementaire slackheid een optimale oplossing van het duale probleem met gelijkheid aan alle drie ongelijkheden. Dit betekent dat een optimale oplossing van het duale probleem voldoet aan

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

en wegens $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -10 \neq 0$ liggen y_1, y_2, y_3 hierdoor eenduidig vast, d.w.z. ook het duale probleem heeft een unieke optimale oplossing.

Opgave 2. *(5 punten)*



In een papierfabriek worden grote papierrollen van 300 cm breedte en 1000 m lengte (de *masterrollen*) volgens de vraag van opdrachtgevers in smallere rollen gesneden, waarbij het aantal en de posities van de snedes tussendoor anders ingesteld kunnen worden (d.w.z. ook binnen een masterrol, deze wordt dan gewoon afgesneden). Voor de opdrachtgevers (bijvoorbeeld drukkerijen) is het namelijk geen probleem als een rol van 1000 m lengte uit meerdere stukken bestaat.
Bij een onderverdeling van de masterrol hoeven de breedtes van de smallere rollen natuurlijk niet tot 300 cm op te tellen, de rest is dan helaas afval.

De opdrachten voor de komende week zijn als volgt:
36 rollen van 140 cm breedte;
60 rollen van 100 cm breedte;
48 rollen van 75 cm breedte.

Voor de papierfabriek zijn er twee voor de hand liggende doelen waarop ze de productie zouden kunnen optimaliseren:

(a) Zo weinig mogelijk masterrollen gebruiken.

(b) Zo weinig mogelijk afval produceren (als overtollige rollen als voorraad bewaard kunnen worden).

Formuleer voor ieder van de doelen (a) en (b) het vinden van een optimaal productieproces als een LP-probleem (niet per se in standaardvorm). Het is niet nodig een oplossing van het LP-probleem te bepalen.

Hint: Uit de variabelen voor het productieproces moet duidelijk worden hoeveel masterrollen in welke combinaties van breedtes gesneden moeten worden.

Oplossing: De variabelen van het LP-probleem corresponderen met de verschillende mogelijke onderverdelingen van een masterrol in de gevraagde breedtes waarbij de rest (afval) kleiner is dan 75 cm. Deze zijn in de volgende tabel aangegeven:

gevraagde breedte	onderverdeling							benodigd aantal
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
140	2	1	1	0	0	0	0	36
100	0	1	0	3	2	1	0	60
75	0	0	2	0	1	2	4	48
afval	20	60	10	0	25	50	0	

De variabele x_i geeft aan hoeveel masterrollen op deze manier onderverdeeld moeten worden.

Natuurlijk geldt $x_i \geq 0$. Dat aan de vraag van de opdrachtgevers voldaan moet worden, geeft de drie randvoorwaarden:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 36, \quad x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60, \quad 2x_3 + x_5 + 2x_6 + 4x_7 \geq 48.$$

De optimaliteitscriteria (a) en (b) hebben alleen maar invloed op de doelfunctie voor het LP-probleem. Voor criterium (a) moet de doelfunctie $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$ geminimaliseerd worden, voor criterium (b) is $20x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 25x_5 + 50x_6$ de te minimaliseren functie.

Opgave 3. *(6 punten)*
Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de matrix van een twee-personen matrix spel. Een rij i van A *domineert* een rij k als $A_{ij} \geq A_{kj}$ voor alle $1 \leq j \leq n$. Net zo *domineert* een kolom j van A een kolom l als $A_{ij} \geq A_{il}$ voor alle $1 \leq i \leq m$.
Zo als gebruikelijk kiest speler X een rij i en speler Y een kolom j en is dan A_{ij} de winst voor speler X (en het verlies van speler Y).

(i) Stel rij i van A wordt door een andere rij van A gedomineerd. Bewijs dat er in dit geval voor speler X een optimale gemengde strategie bestaat met $x_i = 0$.

Concludeer dat de waarde van het spel onveranderd blijft als rij i uit de matrix A weggelaten wordt.

(ii) Stel kolom j van A domineert een andere kolom van A. Bewijs dat er in dit geval voor speler Y een optimale gemengde strategie bestaat met $y_j = 0$.

Concludeer dat de waarde van het spel onveranderd blijft als kolom j uit de matrix A weggelaten wordt.

(iii) Gebruik delen (i) en (ii) om de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

van een twee-personen matrix spel zo ver mogelijk te reduceren. Bepaal vervolgens de waarde van het spel en optimale strategieën voor de spelers X en Y.

Oplossing:

(i) Speler X bepaalt zijn optimale strategie middels $\max_x(\min_j x^{tr}A)$, waarbij $\sum_i x_i = 1$. Stel nu dat rij r door rij s gedomineerd wordt, dan is $A_{rj} \leq A_{sj}$ voor alle j. Als $x_r > 0$, kies dan een nieuwe strategie x' door $x'_r = 0$ en $x'_s = x_r + x_s$ te definiëren (d.w.z. de kans voor rij r gaat over naar rij s), de andere kansen blijven ongewijzigd. De j-de component van $x^{tr}A$ is $\sum_i x_i A_{ij}$ en wegens $A_{rj} \leq A_{sj}$ is $x_r A_{rj} + x_s A_{sj} \leq (x_r + x_s)A_{sj} = x'_r A_{rj} + x'_s A_{sj}$, dus is $\sum_i x_i A_{ij} \leq \sum_i x'_i A_{ij}$. I.h.b. is dan $\min_j x^{tr}A \leq \min_j x'^{tr}A$, dus is x' een minstens even goede strategie als x. Als x een optimale strategie is, is ook x' een optimale strategie en bij x' wordt rij r nooit door speler X gekozen. De waarde van het spel is dan $\min_j x^{tr}A = \min_j x'^{tr}A$ en blijft dus onveranderd als rij r uit de matrix weggelaten wordt.

(ii) Dit loopt volstrekt analoog met deel (i). Speler Y bepaalt zijn optimale strategie middels $\min_y(\max_i Ay)$, waarbij $\sum_j y_j = 1$. Stel nu dat kolom r door kolom s gedomineerd wordt, dan is $A_{ir} \leq A_{is}$ voor alle i. Als $y_s > 0$, kies dan een nieuwe strategie y' door $y'_s = 0$ en $y'_r = y_r + y_s$ te definiëren (d.w.z. de kans voor kolom s gaat over naar kolom r), de andere kansen blijven ongewijzigd. De i-de component van Ay is $\sum_j A_{ij}y_j$ en wegens $A_{ir} \leq A_{is}$ is $A_{ir}y_r + A_{is}y_s \geq A_{ir}(y_r + y_s) = A_{ir}y'_r + A_{is}y'_s$, dus is $\sum_j A_{ij}y_j \geq \sum_j A_{ij}y'_j$. I.h.b. is dan $\max_i Ay \geq \max_i Ay'$, dus is y' een minstens even goede strategie als y. Als y een optimale strategie is, is ook y' een optimale strategie en bij y' wordt kolom s nooit door speler Y gekozen. De waarde van het spel is dan $\max_i Ay = \max_i Ay'$ en blijft dus onveranderd als kolom s uit de matrix weggelaten wordt.

(iii)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{kolom 3 domineert 4}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{rij 3 domineert 2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{kolom 1 domineert 3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{rij 2 domineert 3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{kolom 3 domineert 2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Bij de laatste 2×2-matrix ziet men onmiddellijk dat de rijen (en kolommen) lineair afhankelijk zijn, er geldt

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dus is het een eerlijk spel met waarde 0. Een optimale strategie voor X is $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ voor de gereduceerde matrix, dus $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_4 = 0$ voor de oorspronkelijke matrix en een optimale strategie voor Y is $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ voor de gereduceerde matrix, dus $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{2}{3}$, $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{1}{3}$, $y_5 = 0$ voor de oorspronkelijke matrix.