Discrete Wiskunde (WB011C) **17 januari 2018**

Tentamen met Uitwerkingen

Geef bij elke opgave een bewijs en/of berekening. Je mag daarbij verwijzen naar resultaten uit het boek of naar het formuleblad. Gebruik van een niet grafische rekenmachine is toegestaan. Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Succes!

Opgave 1 (4 punten)**.** Gegeven zijn 4 rode, 4 groene en 4 blauwe bekers. We bekijken verschillende rijtjes van deze 12 bekers, waarbij een verwisseling van twee bekers van dezelfde kleur geen nieuwe rij oplevert.

(a) Op hoeveel manieren kunnen deze 12 bekers in een rijtje worden gezet?

(b) Op hoeveel manieren kunnen deze 12 bekers in een rijtje worden gezet zodanig dat er geen vier bekers van dezelfde kleur naast elkaar staan?

Uitwerking 1.

(a) $\dfrac{12!}{(4!)^3}$

(b) Inclusie exclusie.

$$\frac{12!}{(4!)^3} - \binom{3}{1}\frac{8!}{(4!)^2}\cdot 9 + \binom{3}{2}\frac{4!}{(4!)^1}\cdot 5\cdot 6 - \binom{3}{3}\frac{0!}{(4!)^0}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 32844$$

Opgave 2 (7 punten)**.** Voor positieve gehele getallen n zijn de Fubini getallen $a(n)$ gedefinieerd als het aantal geordende partities van $[n]$. Met een een geordende partitie wordt hier bedoeld dat de partitie een *lijst* van blokken is, waarbij de volgorde van de blokken dus wel uitmaakt (anders dan bij gewone partities die een *verzameling* van blokken zijn), maar de volgorde van de elementen in de blokken niet. Verder wordt afgesproken dat $a(0) = 1$.

(a) Schrijf alle $a(3) = 13$ geordende partities van $[3]$ uit.

(b) Bewijs voor $n \geq 1$ dat $a(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a(n-k)$.

(c) Bewijs voor $n \geq 1$ dat $2a(n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a(j)$.

(d) Definieer de EGF $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a(n)\frac{x^n}{n!}$. Bewijs dat $f(x) = \dfrac{1}{2-e^x}$. Let op dat de recursie van (c) alleen geldt voor $n \geq 1$.

Uitwerking 2.

(a)

$$\begin{array}{rrr} (\{1\}, \{2\}, \{3\}) & (\{1\}, \{3\}, \{2\}) & (\{2\}, \{1\}, \{3\}) \\ (\{2\}, \{3\}, \{1\}) & (\{3\}, \{1\}, \{2\}) & (\{3\}, \{2\}, \{1\}) \\ (\{1\}, \{2,3\}) & (\{2\}, \{1,3\}) & (\{3\}, \{1,2\}) \\ (\{2,3\}, \{1\}) & (\{1,3\}, \{2\}) & (\{1,2\}, \{3\}) \\ (\{1,2,3\}) & & \end{array}$$

(b) Kies voor het eerste blok $k \geq 1$ elementen op $\binom{n}{k}$ manieren, en kies de overige blokken op $a(n-k)$ manieren. Sommeren over alle k van 1 tot n geeft de gevraagde formule.

(c) Substitueer $j = n - k$

$$\begin{aligned} a(n) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a(n-k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{n-j} a(j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a(j) \end{aligned}$$

Tel nu aan beide kanten er $a(n)$ bij op

$$2a(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a(j)$$

(d)

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \sum_{n\geq 0} 2a(n)\frac{x^n}{n!} \\ &= 2 + \sum_{n\geq 1} 2a(n)\frac{x^n}{n!} \\ &= 2 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a(j) \\ &= 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a(j) \\ &= 1 + \sum_{j\geq 0} \sum_{n\geq j} \frac{x^n}{n!} \binom{n}{j} a(j) \\ &= 1 + \sum_{j\geq 0} a(j)\frac{1}{j!} \sum_{n\geq j} \frac{x^n}{(n-j)!} \end{aligned}$$

Substitutie van $k = n - j$. Alternatief: gebruik de convolutieformule voor EGF's.

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{j\geq 0} a(j)\frac{1}{j!} \sum_{k\geq 0} \frac{x^{k+j}}{k!} \\ &= 1 + \sum_{j\geq 0} a(j)\frac{x^j}{j!} \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 + f(x)e^x \end{aligned}$$

De gevraagde formule volgt door de gevonden gelijkheid op te lossen naar f.

Opgave 3 (5 punten)**.** We bekijken het aantal kleuringen van de 8 wieken van de speelgoed windmolen in de afbeelding. Kleuringen zijn equivalent als ze door draaiing (cyclische symmetrie van orde 8) in elkaar overgevoerd kunnen worden. Verder kijken we alleen naar de kleuren op de voorkant (anders dan op het plaatje).

(a) Hoeveel kleuringen zijn er te maken met 4 verschillende kleuren?

(b) Hoeveel verschillende kleuringen zijn er te maken met 4 verschillende kleuren, waarbij elke kleur twee keer voorkomt?

Uitwerking 3.

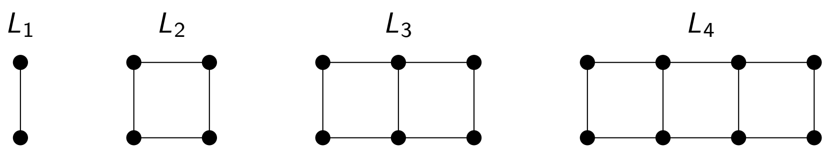
(a) We bepalen de cykelindex van de cyklische groep van orde 8 die werkt op 8 punten. Deze is
$$Z = \frac{1}{8}\left(z_1^8 + z_2^4 + 2z_4^2 + 4z_8\right),$$
want als r een voortbrengende rotatie is, dan hebben r, r^3, r^5, r^7 type z_8 en r^2, r^6 type z_4^2 en r^4 type z_2^4 en $1 = r^0$ type z_1^8. Het antwoord op de vraag vinden we door $z_i = 4$ in te vullen. Dit geeft
$$\frac{1}{8}\left(4^8 + 4^4 + 2\cdot 4^2 + 4^2\right) = 2^{13} + 38 = 8230 \quad \text{kleuringen.}$$

(b) Noem de kleuren a, b, c, d. Dan hebben we de coëfficiënt nodig van $a^2b^2c^2d^2$ in de patronentelreeks. Er zijn twee termen die een bijdrage leveren:

- Door z_1 in de cykelindex te vervangen door $a+b+c+d$ krijgen we de term $\frac{1}{8}(a+b+c+d)^8$. De coëfficiënt van $a^2b^2c^2d^2$ hierin is uit te rekenen met de multinomiaalcoëfficiënt $\frac{1}{8}\binom{8}{2,2,2,2} = 315$.
- Door z_2 in de cykelindex te vervangen door $a^2+b^2+c^2+d^2$ krijgen we de term $\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$. De coëfficiënt van $a^2b^2c^2d^2$ hierin is uit te rekenen met de multinomiaalcoëfficiënt $\frac{1}{8}\binom{4}{1,1,1,1} = \frac{4!}{8} = 3$

In totaal zijn er dus 318 kleuringen waarbij elke kleur twee keer voorkomt.

Opgave 4 (4 punten)**.** Voor $n \geq 1$ definiëren we de laddergraaf L_n als een rooster van hoogte 2 en breedte n. Zie een aantal voorbeelden hieronder.

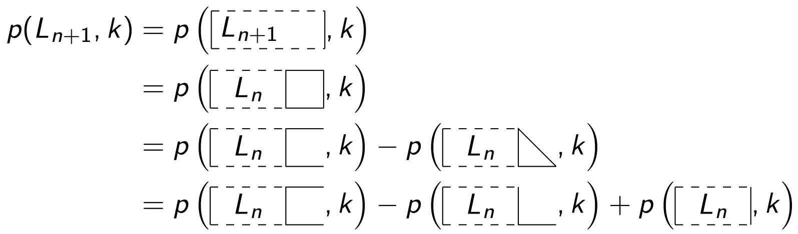


(a) Zij $p(L_n, k)$ de chromatische veelterm van L_n. Bepaal een veelterm $f(k)$ zo dat de volgende recursie geldt: $p(L_{n+1}, k) = f(k)p(L_n, k)$.

(b) Leidt een directe formule af voor $p(L_n, k)$.

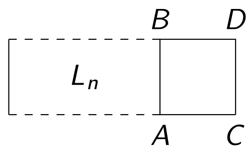
Uitwerking 4.

(a) We gebruiken twee keer deletion-contraction:



$$= p(L_n, k)(k-1)^2 - p(L_n, k)(k-1) + p(L_n, k)$$
$$= p(L_n, k)(k^2 - 3k + 3)$$

Alternatief: in L_{n+1} voegen we twee extra punten, zeg C en D, toe aan L_n: zie het plaatje rechts. A en B zijn punten van L_n. We moeten dus bepalen hoeveel extra kleuringen mogelijk zijn als we C en D toevoegen. Voor C zijn twee opties: (1) C heeft dezelfde kleur als B (1 mogelijke kleur voor C), voor D zijn er dan nog $k-1$ mogelijke kleuringen. (2) C heeft een andere kleur dan B ($k-2$ mogelijkheden, want het mag ook niet de kleur van A zijn), voor D blijven er dan $k-2$ kleuren over. Er komen dus een factor $f(k) = k - 1 + (k-2)^2 = k^2 - 3k + 3$ kleuringen bij.



(b) Omdat $p(L_1, k) = k(k-1)$ volgt met de recursie van (a) dat $p(L_n, k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)^{n-1}$.

Opgave 5 (5 punten)**.** Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening. Met $x < y$ noteren we dat $x \leq y$ en $x \neq y$.

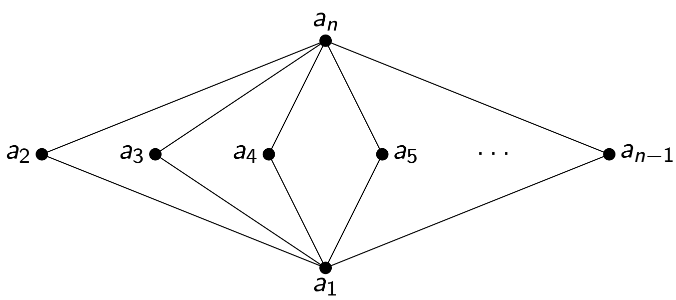
(a) Laat zien dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt:

$$\mu(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij c_i het aantal ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = y$ van lengte i tussen x en y is.

(b) Zij X de verzameling van lineaire deelruimten van $\mathbb{F}_p^2$ en $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$ de partiële ordening op X met inclusie als relatie.

Geef het aantal elementen van X aan en laat zien dat $\mathbf{P}$ het volgende Hasse diagram heeft:



(c) Bepaal de waarden $\mu(a_i, a_j)$ van de Möbius functie van de partiële ordening uit deel (b).

Uitwerking 5.

(a) Dit bewijzen we met inductie over de lengte k van de langste keten tussen x en y. Voor $k = 0$ is $x = y$ en klopt de uitspraak.

Voor $k > 0$ is $x < y$ en geldt $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$. Op z met $x \leq z < y$ kunnen we nu de inductieaanname toepassen:

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x \leq z < y} \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, z)$$

Verder is er een bijectie tussen de ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = z$ met $z < y$ en de ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < y$, want iedere keten van lengte $i + 1$ tussen x en y wordt op een unieke manier verkregen door een keten van lengte i tussen x en een z met $z < y$ te verlengen met de term "$< y$". Dit geeft

$$\mu(x, y) = -\sum_{i \geq 0} (-1)^i c_{i+1}(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+1} c_{i+1}(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij we voor de indexverschuiving in de laatste stap gebruiken dat $c_0(x, y) = 0$ voor $x < y$.

(b) $\mathbb{F}_p^2$ heeft $p + 3$ lineaire deelruimten, de triviale deelruimten $\{\mathbf{0}\}$ en $\mathbb{F}_p^2$ en de $p + 1$ ééndimensionale deelruimten voortgebracht door de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{F}_p$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dat het Hasse diagram de aangegeven vorm heeft is duidelijk.

(c) De waarden $\mu(a_i, a_i) = 1$ voor $1 \leq i \leq n$, $\mu(a_j, a_i) = 0$ voor $1 \leq i < j \leq n$ en $\mu(a_i, a_j) = 0$ voor $2 \leq i < j \leq n - 1$ volgen rechtstreeks uit de definitie van de Möbius functie. Verder is $\mu(a_1, a_i) = -1$ voor $2 \leq i \leq n - 1$, omdat in dit geval $a_1 < a_i$ de enige keten is tussen a_1 en a_i. Met hetzelfde argument is $\mu(a_i, a_n) = -1$ voor $2 \leq i \leq n - 1$. Ten slotte is $\mu(a_1, a_n) = n - 3$, want er zijn $n - 2$ ketens van lengte 2 en 1 keten van lengte 1 tussen a_1 en a_n.