Discrete Wiskunde (WB011C) **4 april 2019**

Uitwerkingen Hertentamen

Opgave 1 (3 punten)**.** Er zijn 26! verschillende strings waarin elk van de 26 letters van het alfabet precies één keer voorkomt. Voor hoeveel van die strings geldt dat daarin geen van de volgende drie deelstrings voorkomt: `sep`, `bram`, `bernd`?

Oplossing 1. Met inclusie exclusie. Merk op dat alleen de deelstrings `sep` en `bram` tegelijk kunnen voorkomen (want de andere tweetallen hebben letters gemeen).
In totaal zijn er 26! strings.

Er zijn 24! strings waar de deelstring `sep` in voorkomt, want het aantal rangschikkingen van 24 objecten, want 23 letters en 1 deelstring.

Net zo zijn er 23! strings waar `bram` niet in voorkomt.

Net zo zijn er 22! strings waar `bernd` niet in voorkomt.

Net zo zijn er 21! strings waar `sep` of `bram` niet in voorkomt (rangschik 19 letters en 2 deelstrings).

Het gevraagde aantal is dus: $26! - 24! - 23! - 22! + 21!$.

Opgave 2 (3 punten)**.** $P(n, k)$ is het aantal partities van een positief geheel getal n in k delen, $P(n)$ is het aantal partities van het getal n in een willekeurig aantal delen.

Bepaal alle positieve gehele getallen k en n waarvoor geldt dat $P(n, k) = P(n - k)$.

Oplossing 2. Per definitie geldt natuurlijk

$$P(n-k) = \sum_{j=0}^{n-k} P(n-k, j).$$

Door van een partitie van n in k delen van elk deel 1 af te halen verkrijgen we dat

$$P(n,k) = \sum_{j=0}^{k} P(n-k, j).$$

Het verschil van de bovenste min de onderste is 0 desda

$$k + 1 > n - k,$$
$$2k \geq n.$$

Opgave 3 (6 punten)**.** Voor positieve gehele getallen n zijn de getallen $a(n)$ gedefinieerd als het aantal functies $\varphi\colon [n] \to \mathbb{Z}$ waarvoor geldt dat $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(j)\colon j \in [n]\} = [k]$ voor een zekere positieve gehele k. Verder wordt afgesproken dat $a(0) = 1$.

(a) Bewijs dat $a(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!$.

(b) Zij $k \geq 0$ vast. Definieer $b_k(n) = S(n,k)k!$ voor $n \geq 0$.
Bewijs dat $(e^x - 1)^k$ de EGF is van $b_k(n)$.

(c) Bewijs dat $\dfrac{1}{2 - e^x}$ de EGF is van $a(n)$.

Oplossing 3.

(a) Merk op dat $a(n)$ het aantal functies telt die $[n]$ surjectief afbeeldt op een verzameling van de vorm $[k]$. Nu telt $S(n,k)k!$ surjectieve functies van $[n]$ naar $[k]$. Sommeren over k geeft dus $a(n)$.

(b)

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^k &= \sum_{j\geq 0} \binom{k}{j} (-1)^j e^{x(k-j)} \\
&= \sum_{j\geq 0} \binom{k}{j} (-1)^j \sum_{n\geq 0} \frac{x^n (k-j)^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j\geq 0} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} S(n,k)k!
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} a(n) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k\geq 0} S(n,k)k! \\
&= \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} S(n,k)k! \\
&= \sum_{k\geq 0} (e^x - 1)^k \\
&= \frac{1}{1 - (e^x - 1)} \\
&= \frac{1}{2 - e^x}
\end{aligned}$$

Opgave 4 (4 punten)**.** Zij G een graaf met het volgende chromatische polynoom

$$p(G,k) = k(k^2 - 3k + 3)(k-1)^{37}.$$

Bewijs dat er een lijn e in G is zodat $G - e$ een boom is.

Oplossing 4. We leiden een aantal eigenschappen af van G. Het aantal punten is de graad en dat is 40. Het aantal lijnen is het tegengestelde van de coëfficient van k^{39} en dat is $37 + 3 = 40$. G bestaat uit 1 samenhangscomponent omdat $p(G,k)$ niet deelbaar is door k^2 (maar natuurlijk wel door k). Dus G heeft te veel lijnen om een boom te kunnen zijn en moet dus een cykel bevatten. Zij e een lijn uit die cykel. Dan is $G - e$ samenhangend met 40 punten en 39 lijnen en dus is $G - e$ een boom.

Opgave 5 (4 punten)**.** $Z_{S_n}(z_1, \ldots z_n)$ is de cykelindex van de symmetrische groep S_n met zijn natuurlijke werking op n punten.

(a) Bewijs dat $Z_{S_n}(2, 2, \ldots, 2) = n + 1$.

(b) Bewijs dat $Z_{S_n}(3, 3, \ldots, 3) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Oplossing 5. Omdat elke verwisseling een equivalente kleuring levert gaat het er niet om welke punten worden gekleurd, maar alleen hoeveel punten welke kleur krijgen.

(a) Er zijn twee kleuren. Het aantal punten dat de eerste kleur krijgt kan gelijk zijn aan $0, 1, 2, \ldots, n$. Dus $n + 1$ opties. Het aantal punten met de tweede kleur ligt dan vast.

(b) Als we de eerste kleur k keer gebruiken dan zijn er voor de tweede kleur $n + 1 - k$ opties en ligt de derde kleur vast. Sommeren geeft $\sum_{k=0}^{n+1} n+1-k = \sum_{j=0}^{n+1} j = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Opgave 6 (5 punten)**.**

(a) Beschrijf alle mogelijke $(b; v; r; 2; 1)$-designs.

(b) Voor een design D heeft het complementaire design D^c als blokken de complementen van de blokken van D.

Bewijs dat het complementaire design D^c van een $(b; v; r; k; \lambda)$-design D inderdaad een design is. Bepaal ook de parameters van D^c in termen van de parameters D.

Oplossing 6.

(a) Elk blok bevat 2 elementen en elk tweetal elementen zit in 1 blok. Dus de blokken moeten alle paren zijn.

(b) Het aantal elementen en blokken in D^c zijn hetzelfde als in D.

Vanwege het complement bevatten in D^c de blokken $v - k$ elementen.

Als in D een element, zeg x, in r blokken zit, dan zit x niet in $b - r$ blokken. De complementen van de blokken waar x niet in zit zijn de blokken van D^c waar x wel in zit en dit zijn er dus $b - r$.

Voor de laatste parameter van D^c moeten we nagaan hoeveel blokken er zijn in D waar een gegeven tweetal, noem het (x, y), niet in zit. Dit gaat met inclusie exclusie. Er zijn b blokken in D. In r daarvan komt x voor en in r daarvan komt y voor, maar in λ daarvan komen x en y voor. In totaal dus $b - 2r + \lambda$.

In het bijzonder zijn we nu nagegaan dat D^c een $(b, v, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$-design is.