Uitwerkingen Tentamen Lineaire Algebra A (gelegenheid 1)

Opgave 1. *(7 punten)*

(i) Voor $k \in \mathbb{R}$ is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen gegeven:

$$\begin{aligned} kx + k^2 y &= k + 4 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

(a) Geef alle k waarvoor het stelsel een eenduidige oplossing heeft. Licht je antwoord toe!

(b) Vind alle k waarvoor het stelsel meer dan één oplossing heeft.
Geef in deze gevallen de volledige oplossingsverzameling aan.

(ii) Voor $c \in \mathbb{R}$ zij de matrix A_c gegeven door $A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ c & c & 2 \\ 2 & c & c \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal alle waarden van c waarvoor A_c niet inverteerbaar is.

(b) Voor $c = 1$ is A_c wel inverteerbaar (dat kan je hopelijk uit deel (a) concluderen).
Geef de inverse matrix A_1^{-1} aan.

Oplossing:

(i) (a) **(1 punt)** De matrix van het stelsel is $A = \begin{pmatrix} k & k^2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ en heeft determinant $4k - k^2 = k(4-k)$. Voor $k \neq 0, 4$ is A dus inverteerbaar en heeft het stelsel een eenduidige oplossing.

In plaats van de determinant uit te rekenen kan de matrix natuurlijk ook geveegd worden: $\begin{pmatrix} k & k^2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{P_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ k & k^2 \end{pmatrix} \underset{O_{12}(-k)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & k^2 - 4k \end{pmatrix}$. De geveegde matrix heeft rang 2 dan en slechts dan als $k^2 - 4k \neq 0$, dus voor $k \neq 0, 4$, en in dit geval is het stelsel eenduidig oplosbaar.

Het lukt ook, het stelsel op de ouderwetse manier op te lossen en hierbij de toegelaten waarden voor k in de gaten te houden. Uit de tweede vergelijking volgt $x = 2 - 4y$ en invullen in de eerste vergelijking geeft $2k - 4ky + k^2 y = k + 4$, dus $(k^2 - 4k)y = 4 - k$. Voor $k^2 - 4k \neq 0$, dus voor $k \neq 0, 4$ geeft dit voor y de eenduidige oplossing $y = \frac{4-k}{k(k-4)} = -\frac{1}{k}$ en hiermee $x = 2 - 4y = 2 + \frac{4}{k} = \frac{2k+4}{k}$.

(b) **(2 punten)** Er komen alleen $k = 0, 4$ in aanmerking voor meerdere oplossingen.
Voor $k = 0$ wordt de eerste vergelijking $0 \cdot x + 0 \cdot y = 4$ duidelijk strijdig, dus heeft het stelsel in dit geval geen oplossing. Natuurlijk volgt de onoplosbaarheid ook uit het feit dat de uitgebreide matrix $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$ van het stelsel rang 2 heeft, terwijl de matrix (zonder rechterzijde) rang 1 heeft.

Voor $k = 4$ wordt de eerste vergelijking $4x + 16y = 8$ en is dus het 4-voud van de tweede vergelijking. De oplossingsverzameling is in dit geval
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 4y = 2\} = \{(2 - 4t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) (a) **(1 punt)** Middels de regel van Sarrus of ontwikkeling naar de eerste rij zien we dat $\det(A_c) = c^2 - 2c - c^3 + 4c = c(-c^2 + c + 2) = c(c+1)(-c+2)$.

Alternatief kan de matrix natuurlijk ook op bovendriehoeksvorm gebracht worden, om de determinant te bepalen, hierbij is het belangrijk op eventuele noemers te letten die natuurlijk niet 0 mogen zijn. Het lukt ook helemaal zonder noemers:

$$\det(A_c) = \det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ c & c & 2\\ 2 & c & c\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 0 & c-c^2 & 2\\ 0 & -c & c\end{pmatrix} = (-c)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 0 & c-c^2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} =$$
$$c\cdot\det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & c-c^2 & 2\end{pmatrix} = c\cdot\det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2+c-c^2\end{pmatrix} = c(2+c-c^2) = c(1+c)(2-c).$$

De matrix A_c is niet inverteerbaar dan en slechts dan als $\det(A_c) = 0$, dus voor $c = 0, 2, -1$.

(b) **(3 punten)** We bepalen A_1^{-1} door de matrix $(A_1 \mid I_3)$ door elementaire rijoperaties op de vorm $(I_3 \mid B)$ te transformeren, want dan is $B = A_1^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{O_{12}(-1),O_{13}(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{M_2(\frac{1}{2}),M_3(-1),P_{23}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right) \underset{O_{32}(1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{O_{21}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right)$$

De inverse matrix is dus $A_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Opgave 2. *(7 punten)*

Zij $T : V \to W$ een lineaire afbeelding voor de $\mathbb{R}$-vectorruimten V en W. Zij verder U een lineaire deelruimte van W.

(i) Definieer de deelverzameling $X = \{v \in V \mid T(v) \in U\}$ van vectoren met beeld in U.

(a) Bewijs dat X een lineaire deelruimte is van V en dat X de kern $\mathrm{N}(T)$ van T omvat.

(b) Laat zien dat $T(X) = U \cap \mathrm{R}(T)$ (waarbij $T(X) = \{T(v) \mid v \in X\}$).

(c) Neem aan dat V en W eindigdimensionaal zijn.
Concludeer dat in dit geval geldt dat $\dim(X) = \dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(U \cap \mathrm{R}(T))$.

(ii) Zij $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2x - z\\ y\\ -2x + z\end{pmatrix}$ en zij

$U = \mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix})$.

Bepaal een basis van $X = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) \in U\}$.

Oplossing:

(i) (a) **(1.5 punten)** Omdat U een lineaire deelruimte is, is $0_W \in U$ en er geldt $T(v) = 0_W$ voor iedere $v \in \mathrm{N}(T)$, dus is $\mathrm{N}(T) \subset X$. I.h.b. is dus $X \neq \emptyset$, want de nulvector 0_V ligt zeker in de kern $\mathrm{N}(T)$.

Zij $v, v' \in X$, dan is $T(v) = u \in U$ en $T(v') = u' \in U$ en omdat U een lineaire deelruimte is, is $T(v + v') = T(v) + T(v') = u + u' \in U$ en dus ook $v + v' \in X$. Net zo geldt voor $c \in \mathbb{R}$ dat $T(cv) = cT(v) = cu \in U$, dus is ook $cv \in X$.

(b) **(1.5 punten)** Voor $v \in X$ is $T(v) \in U$ en $T(v) \in \mathrm{R}(T)$, dus is $T(v) \in U \cap \mathrm{R}(T)$ en dus $T(X) \subset U \cap \mathrm{R}(T)$.

Zij nu omgekeerd $u \in U \cap \mathrm{R}(T)$. Wegens $u \in \mathrm{R}(T)$ is er een $v \in V$ met $T(v) = u$ en wegens $u \in U$ geldt voor deze v dat $v \in X$, dus is $u = T(v) \in T(X)$. Dit geeft $U \cap \mathrm{R}(T) \subset T(X)$.

Dit laat zich ook in één stap bewijzen, maar dat moet zeer zorgvuldig opgeschreven worden. $\mathrm{R}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$, daarom is $U \cap \mathrm{R}(T) = \{T(v) \mid v \in V, T(v) \in U\}$. Nu is $\{v \in V \mid T(v) \in U\} = X$, dus is $U \cap \mathrm{R}(T) = \{T(v) \mid v \in X\} = T(X)$.

(c) **(1 punt)** Dit is juist de dimensiestelling (voor kern en beeld) toegepast op de beperking $T_{|X}$ van T op X. Volgens de dimensiestelling geldt $\dim(T_{|X}) = \dim(\mathrm{N}(T_{|X})) + \dim(\mathrm{R}(T_{|X}))$. Omdat de kern $\mathrm{N}(T)$ volledig in X ligt, is $\mathrm{N}(T_{|X}) = \mathrm{N}(T)$ en in deel (b) is aangetoond dat $\mathrm{R}(T_{|X}) = U \cap \mathrm{R}(T)$.

(ii) **(3 punten)** Voor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathrm{N}(T)$ geldt $2x - z = 0$ en $y = 0$, dus is $\mathrm{N}(T) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$, d.w.z. $\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$.

Men gaat nu makkelijk na dat $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{R}(T)$ ligt, bijvoorbeeld is $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = u$.

Hiermee volgt dat $U \cap \mathrm{R}(T) = U$ en de dimensieformule uit deel (i)(c) geeft $\dim(X) = 1 + 1 = 2$.

Het laatste kunnen we in dit geval echter ook direct concluderen, want met $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ hebben we twee vectoren in X gevonden die lineair onafhankelijk zijn, dus is $\dim(X) \geq 2$. Maar $\dim(X) < 3$, omdat X niet de hele ruimte $\mathbb{R}^3$ is, bijvoorbeeld is $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin U$.

Een basis van X is daarom (bijvoorbeeld) $\beta = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Het is niet per se nodig, de kern te bepalen, in principe is het voldoende twee lineair onafhankelijke vectoren uit X aan te geven, bijvoorbeeld $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Echter moet wel beargumenteerd worden waarom $\dim(X) = 2$ is.

Alternatief kan dit ook direct met een stelsel vergelijkingen opgelost worden. Uit $\begin{pmatrix}2x-z\\y\\-2x+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\\-c\end{pmatrix}$ volgt $y = c$ en $z = 2x - c$, dus is $X = \{\begin{pmatrix}b\\c\\2b-c\end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

Met $b = 1, c = 0$ en $b = 0, c = 1$ laat zich dan direct de basis $\beta = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})$ aflezen.

Opgave 3. *(5 punten)*
Zij $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$.

(i) Bepaal een basis β van $\mathbb{R}^2$ met $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$.

(ii) Bewijs dat er geen basis γ van $\mathbb{R}^2$ bestaat zo dat $[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** Voor de eerste basisvector v_1 in β moet gelden dat $T(v_1) = -v_1$ (d.w.z. v_1 is een eigenvector voor de eigenwaarde -1) en voor $v_1 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ betekent dit dat $T(v_1) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat $y = -x$, dus is v_1 een veelvoud van $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en we kiezen gewoon $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Voor de tweede basisvector v_2 in β moet nu gelden dat $T(v_2) = 2v_1 + v_2$ en voor $v_2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ geeft dit $T(v_2) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+x\\-2+y\end{pmatrix}$. Hieruit volgt $y = 2 + x$ en we kunnen bijvoorbeeld $v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ kiezen.

Het is duidelijk dat $\beta = (v_1, v_2)$ lineair onafhankelijk is, dus is dit een basis met de gewenste eigenschap.

(ii) **(2 punten)** Met betrekking tot de standaardbasis α van $\mathbb{R}^2$ heeft T de matrix $[T]_\alpha^\alpha = A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Dan is $[T]_\gamma^\gamma = Q^{-1}AQ$ voor de basistransformatie $Q = [id_{\mathbb{R}^2}]_\gamma^\alpha$. We weten echter dat $\det(Q^{-1}AQ) = \det(A)$ en er geldt $\det(A) = -1$, terwijl $\det([T]_\gamma^\gamma) = 1$ voor de gegeven matrix $[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Nog korter is het argument dat een lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alleen de eigenwaarde 1 heeft (voor een bovendriehoeksmatrix zijn de diagonaalelementen juist de eigenwaarden), maar men ziet makkelijk (zo als in deel (i)) dat T de eigenwaarde -1 heeft (met eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

Alternatief laat zich dit analoog als in deel (i) nagaan. Voor de eerste basisvector v_1 in β moet gelden dat $T(v_1) = v_1$ (d.w.z. v_1 is een eigenvector voor de eigenwaarde 1) en voor $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ betekent dit dat $T(v_1) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Hieruit volgt dat $y = x$, dus is v_1 van de vorm $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ voor een $a \neq 0$.

Voor de tweede basisvector v_2 in β moet nu gelden dat $T(v_2) = 2v_1 + v_2$ en voor $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ geeft dit $T(v_2) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + x \\ 2a + y \end{pmatrix}$. Hieruit volgt $y = 2a + x$ en $x = 2a + y$, maar dan is $y - x = 2a$ en $y - x = -2a$ en wegens $a \neq 0$ is dit onmogelijk.

Opgave 4. *(7 punten)*

Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Stel dat v een eigenvector is van A voor de eigenwaarde λ.

Laat zien dat v dan ook een eigenvector is van de matrix $B = A^7 + 3A^4 + 12A$ en dat de bijhorende eigenwaarde $\lambda^7 + 3\lambda^4 + 12\lambda$ is.

(ii) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A.

(iii) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix $B = A^7 + 3A^4 + 12A$. Licht toe waarom dit inderdaad alle eigenwaarden zijn.

Hint: Gebruik deel (i).

(iv) Bereken $A^7 v$ voor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Hint: Schrijf v als som van eigenvectoren van A.

Oplossing:

(i) **(1 punt)** Uit $Av = \lambda v$ volgt wegens $A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1} v$ dat $A^k v = \lambda^k v$ en voor een scalair c geldt $cA^k v = c\lambda^k v$, dus is v een eigenvector voor de eigenwaarde $\lambda^7 + 3\lambda^4 + 12\lambda$.

(ii) **(3 punten)** Middels ontwikkeling naar de eerste kolom zien we dat A het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 6 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ heeft. De eigenwaarden van A zijn dus 1 en 2.

Het is geen goed plan het product $(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$ eerst uit te rekenen en dan de nulpunten te zoeken, een factor als $(1-\lambda)$ geeft al expliciet een nulpunt aan. Let verder op dat voor het berekenen van het karakteristieke polynoom de matrix $A-\lambda I_3$ geveegd kan worden, maar eerst A vegen naar een bovendriehoeksmatrix A' en dan $\det(A'-\lambda I_3)$ te berekenen zo dat de diagonaalelementen van A' de eigenwaarden zijn, is verkeerd.

De eigenruimte E_1 voor de eigenwaarde $\lambda = 1$ is de de kern van $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ en is gelijk aan $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

De eigenruimte E_2 voor de eigenwaarde $\lambda = 2$ is de de kern van $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ en is gelijk aan $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$.

(iii) **(1.5 punten)** Uit (i) en (ii) volgt dat $1+3+12 = 16$ en $2^7+3\cdot2^4+12\cdot2 = 128+48+24 = 200$ eigenwaarden zijn van $B = A^7 + 3A^4 + 12A$.

Verder is $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van A, d.w.z. A is diagonaliseerbaar. Omdat iedere eigenvector van A ook een eigenvector van B is, is ook B diagonaliseerbaar en omdat de eigenwaarden onder een basistransformatie niet veranderen, heeft B geen andere eigenwaarden dan 16 en 200.

Het klopt niet dat iedere eigenwaarde/eigenvector van B afkomstig moet zijn van een eigenwaarde/eigenvector van A. Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, deze heeft $\lambda = 1$ als enige (reële) eigenwaarde. De matrix $B = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ heeft echter ook $\lambda = -1$ als eigenwaarde.

(iv) **(1.5 punten)** We schrijven v als $v = v_1 + v_2$ voor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hierbij is v_1 een eigenvector voor de eigenwaarde 1 en v_2 een eigenvector voor de eigenwaarde 2, dus is

$$A^7v = A^7(v_1+v_2) = A^7v_1 + A^7v_2 = v_1 + 2^7v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 128\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ 257 \\ 386 \end{pmatrix}.$$

Natuurlijk kan je de vector v ook 7 keer met A vermenigvuldigen, maar dat is behoorlijk meer werk: $Av = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A^2v = A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$, $A^3v = A\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 26 \end{pmatrix}$,

$A^4v = A\begin{pmatrix}9\\17\\26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\33\\50\end{pmatrix}$, $A^5v = A\begin{pmatrix}17\\33\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}33\\65\\98\end{pmatrix}$, $A^6v = A\begin{pmatrix}33\\65\\98\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65\\129\\194\end{pmatrix}$,
$A^7v = A\begin{pmatrix}65\\129\\194\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}129\\257\\386\end{pmatrix}$.

Nog meer werk is het, de machten $A^2, \ldots, A^7$ uit te rekenen en dan $A^7v = \begin{pmatrix}1 & 254 & -127\\0 & 509 & -254\\0 & 762 & -380\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ te berekenen, maar verkeerd is het natuurlijk ook niet (alleen zeer gevoelig voor rekenfouten).