Uitwerkingen Tentamen Lineaire Algebra A (kans A)

Opgave 1. *(8 punten)*
Voor $k \in \mathbb{R}$ is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen gegeven:

$$\begin{aligned} kx - 2y - z &= 3 \\ (k+1)y + 4z &= 2 \\ (k-1)z &= -1 \end{aligned}$$

(i) Geef alle k waarvoor het stelsel een eenduidige oplossing heeft. Licht je antwoord toe!

(ii) Vind alle k waarvoor het stelsel meer dan één oplossing heeft.
Geef in deze gevallen de volledige oplossingsverzameling aan.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** De matrix van het stelsel is $A = \begin{pmatrix} k & -2 & -1 \\ 0 & k+1 & 4 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ en omdat dit een bovendriehoeksmatrix is, kunnen we rechtstreeks aflezen dat $\det A = 0$ dan en slechts dan als $k \in \{0, -1, 1\}$. Voor $k \neq 0, -1, 1$ is A dus inverteerbaar en heeft het stelsel een eenduidige oplossing.

Voor $k \in \{0, -1, 1\}$ is het stelsel of niet oplosbaar (namelijk als de rechterzijde niet in het opspansel ligt van de kolommen van A) of heeft het stelsel meerdere oplossingen (omdat we ieder element uit de kern van A bij een particuliere oplossing kunnen optellen).

Natuurlijk kunnen we ook proberen een oplossing expliciet te bepalen, omdat het stelsel al in driehoeksvorm is. Uit de laatste vergelijking volgt $z = -\frac{1}{k-1}$, waarbij natuurlijk $k \neq 1$ moet gelden. Vervolgens is dan $(k+1)y = 2 + \frac{4}{k-1} = \frac{2(k+1)}{k-1}$, voor $k \neq -1$ volgt hieruit $y = \frac{2}{k-1}$ (voor $k = -1$ staat er $0 \cdot y = 0$ en dat legt y niet vast). Hiermee volgt uit de eerste vergelijking $kx = 3 + \frac{4}{k-1} - \frac{1}{k-1} = \frac{3k}{k-1}$ en voor $k \neq 0$ geeft dit $x = \frac{3}{k-1}$.

Voor $k \neq 1, -1, 0$ hebben we dus expliciet de eenduidige oplossing $(\frac{3}{k-1}, \frac{2}{k-1}, \frac{-1}{k-1})$ bepaald, de andere waarden moeten we dan nog apart onderzoeken (zie deel (ii)).

(ii) **(5 punten)** Er komen alleen $k = 0, -1, 1$ in aanmerking voor meerdere oplossingen.

Voor $k = 1$ is $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en ligt de rechterzijde $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ niet in het opspansel van de kolommen A_{-j} van A, omdat de derde component van b niet nul is. Wegens $3 = \operatorname{rang}(A \mid b) > \operatorname{rang}(A) = 2$ is het stelsel dus niet oplosbaar.

$k = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}(A_{-j})$, dus is $\mathrm{rang}(A \mid b) = \mathrm{rang}(A) = 2$.

Wegens $\ker A = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ is de oplossingsverzameling $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

$k = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}(A_{-j})$, dus is $\mathrm{rang}(A \mid b) = \mathrm{rang}(A) = 2$.

Wegens $\ker A = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ is de oplossingsverzameling $\left\{ \begin{pmatrix} -2t - \frac{7}{2} \\ t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{2} - \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Opgave 2. *(8 punten)*
Zij T de lineaire afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ naar $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gegeven door

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -a + c & -a - b \\ a + b & b + c \end{pmatrix}.$$

(i) Geef telkens een basis van de kern $\mathrm{N}(T)$ en van het beeld $\mathrm{R}(T)$ van T.

Licht toe waarom dit inderdaad bases zijn van $\mathrm{N}(T)$ en $\mathrm{R}(T)$.

(ii) Breid een basis van het beeld $\mathrm{R}(T)$ uit tot een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Leg ook hier uit, waarom je aangegeven matrices inderdaad een basis vormen van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iii) Zij $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en definieer $\mathcal{C} = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid XB = BX\}$.

Bewijs dat $\mathcal{C}$ een lineaire deelruimte is van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en bepaal de dimensie van $\mathcal{C}$.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** Er geldt $ax^2 + bx + c \in \mathrm{N}(T)$ dan en slechts dan als $\begin{pmatrix} -a + c & -a - b \\ a + b & b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus voor $-a + c = 0$, $a + b = 0$ en $b + c = 0$, d.w.z. voor $c = a$ en $b = -a$. De kern is dus $\mathrm{N}(T) = \{ax^2 - ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$ een heeft dimensie 1, een basis is $\{x^2 - x + 1\}$ (voor een deelruimte van dimensie 1 vormt ieder element $\neq 0$ een basis).

Volgens de dimensiestelling (voor kern en beeld) is $\dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{R}(T) = \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, dus is $\dim \mathrm{R}(T) = 2$. De matrices $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zijn geen veelvouden van elkaar, daarom is $\{T(1), T(x)\}$ lineair onafhankelijk en dus een basis van $\mathrm{R}(T)$.

(ii) **(2 punten)** Als we de matrices uit $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ als vectoren in $\mathbb{R}^4$ interpreteren door de twee kolommen onder elkaar te plaatsen, zien we snel dat we $T(1)$ en $T(x)$ met $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tot een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ kunnen uitbreiden, want de corresponderende vectoren in $\mathbb{R}^4$ vormen de benedendriehoeksmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ met lineair onafhankelijke kolommen.

Ter bevestiging gaan we op de gebruikelijke manier na dat uit

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b & a+b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

volgt dat $a = 0$ en $b = 0$ en hiermee ook $c = 0$ en $d = 0$, dus is

$$\beta = \{T(1), T(x), X_3, X_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

lineair onafhankelijk en wegens $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Alternatief kan men laten zien dat de gekozen basiselementen een voortbrengend stelsel voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vormen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-a-c+d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dus is $\mathrm{span}(\beta) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en opnieuw wegens $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ een basis.

(iii) **(3 punten)** Het is duidelijk dat de nulmatrix O in $\mathcal{C}$ ligt. Voor $X, Y \in \mathcal{C}$ is $(X+Y)B = XB + YB = BX + BY = B(X+Y)$, dus is $X + Y \in \mathcal{C}$. Voor $X \in \mathcal{C}$ en $c \in \mathbb{R}$ is $(cX)B = c(XB) = c(BX) = B(cX)$, dus is $cX \in \mathcal{C}$. Dit laat zien dat $\mathcal{C}$ een lineaire deelruimte is van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Alternatief gaat men net zo snel na dat $X \mapsto XB - BX$ een lineaire afbeelding is waarvan $\mathcal{C}$ de kern is.

Uit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ volgt dat $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\mathcal{C}$ ligt dan en slechts dan als $b = -c$, $-a+b = -d$, $d = a+c$ en $-c+d = b+d$ en dit is equivalent met $b + c = 0$, $-a+b+d = 0$ en $-a-c+d = 0$, waarbij de laatste vergelijking via $c = -b$ overeen komt met de voorlaatste. Hieruit volgt dat $X \in \mathcal{C}$ dan en slechts dan als $c = -b$ en $d = a - b$, dus is $\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{aI_2 - bB \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ en i.h.b. is $\dim(\mathcal{C}) = 2$.

Natuurlijk kan men ook eerst bepalen dat $\mathcal{C}$ van deze vorm is en vervolgens nagaan dat dit een lineaire deelruimte is (d.w.z. afgesloten t.o.v. optelling en scalaire vermenigvuldiging).

Als we er rustig naar kijken, zouden we er achter kunnen komen dat $\mathcal{C} = R(T)$ (uit deel (i)).

Opgave 3. *(6 punten)*
Bewijs of weerleg (bij voorkeur door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

(i) Er bestaat geen reële 3×3-matrix A met $A^2 = -I_3$.

(ii) Voor alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ en $c \in \mathbb{R}$ geldt $\det(cI_n - A) = c^n - \det(A)$.

(iii) Voor alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ en alle kolomvectoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ geldt $\det(u\,v^t) = 0$.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** Dit is juist.
Wegens $\det(A) \in \mathbb{R}$ geldt $\det(A^2) = (\det A)^2 \geq 0$, terwijl $\det(-I_3) = -1$.

Alternatief kan men ook eerst constateren dat uit $A^2 = -I_3$ volgt dat A inverteerbaar is met $A^{-1} = -A$. Dan is $\det(A) \neq 0$ met $\frac{1}{\det(A)} = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$. Ook hier volgt dan met $\det(A)^2 = -1$ een tegenspraak.

Merk op: Het argument werkt niet alleen voor $n = 3$, maar voor ieder oneven n, want dan is $\det(-I_n) = -1$.

Voor even $n = 2m$ is de uitspraak echter onjuist, want $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en door dit langs de diagonaal m keer te herhalen vindt men een oplossing van $A^2 = -I_n$. Dit maakt duidelijk dat A^2 een diagonaalmatrix kan zijn zonder dat A een diagonaalmatrix is. Ook laat dit zien dat expliciet uitwerken van A^2 voor onbekenden als elementen van A niet tot een strijdig stelsel leidt.

(ii) **(2 punten)** Dit is onjuist.
Omdat bijna altijd $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ (de determinant is multiplicatief, maar niet additief), geeft bijna iedere keuze van A en c een tegenvoorbeeld.

Neem bijvoorbeeld $A = I_n$ en $c = 2$, dan is $cI_n - A = I_n$ en dus $\det(cI_n - A) = 1$, terwijl $c^n - \det(A) = 2^n - 1 \neq 1$ voor $n \geq 2$.

Voor even n geeft zelfs $c = 0$ een tegenvoorbeeld, want dan is $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A) \neq 0 - \det(A)$ voor een inverteerbare matrix A (waarvoor dus $\det(A) \neq 0$).

(iii) **(2 punten, bonus)** Dit is juist.
De j-de kolom van de matrix $u\,v^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_n \end{pmatrix}$ is $v_j \cdot u$, dus zijn alle kolommen van $u\,v^t$ veelvouden van u en wegens $n \geq 2$ dus lineair afhankelijk en dan is $\det(u\,v^t) = 0$.

Soortgelijk argument: omdat alle kolommen van $u\,v^t$ veelvouden zijn van u heeft de matrix $u\,v^t$ rang 1 of 0 (als $u = 0$ of $v = 0$) en is wegens $n \geq 2$ dus niet inverteerbaar, daarom is $\det(u\,v^t) = 0$.

Het laat zich (met iets meer moeite) ook met inductie bewijzen: Voor $n = 2$ is $u\,v^t = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix}$ en $\det(u\,v^t) = u_1v_1u_2v_2 - u_1v_2u_2v_1 = 0$.

Voor $n > 2$ en $A = u\,v^t$ is $\widetilde{A}_{1j} = u'\,v'^t$, waarbij u' uit u ontstaat door de eerste component en v' uit v door de j-de component weg te laten. Volgens inductie is dan $\det(\widetilde{A}_{1j}) = 0$ en ontwikkeling naar de eerste rij geeft $\det(u\,v^t) = 0$.

Opgave 4. *(9 punten)*
Van een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven dat T de eigenwaarden 1, 2 en 3 heeft met bijhorende eigenvectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Verder zij $v_0 = v_1 + v_2$.

(i) Zij $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$ de basis uit de gegeven eigenvectoren.
Bepaal de matrix $D = [T]_\gamma^\gamma$ van T met betrekking tot γ.

(ii) Is T inverteerbaar? Licht je antwoord toe.

(iii) Is v_0 een eigenvector van T? Licht je antwoord toe.

(iv) Zij β de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ en γ de basis $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$.
Geef de matrix $Q = [id]_\gamma^\beta$ aan en bereken de inverse matrix $Q^{-1} = [id]_\beta^\gamma$.

(v) Bepaal de matrix $A = [T]_\beta^\beta$ van T met betrekking tot de standaardbasis β van $\mathbb{R}^3$.

Oplossing:

(i) **(1 punt)** Het is gegeven dat $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = 2v_2$ en $T(v_3) = 3v_3$, daarom heeft T met betrekking tot de basis $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$ de matrix $[T]_\gamma^\gamma = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) **(1 punt)** De matrix $D = [T]_\gamma^\gamma$ heeft determinant $6 \neq 0$ en is dus inverteerbaar, daarom is T inverteerbaar.

Alternatief argument: Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is inverteerbaar dan en slechts dan als de kern van T triviaal is, d.w.z. als 0 geen eigenwaarde is. Omdat T drie verschillende eigenwaarden ongelijk aan 0 heeft, kan 0 geen eigenwaarde zijn.

Nog een mogelijkheid: Het beeld bevat $v_1, 2v_2, 3v_3$ en dus ook v_1, v_2, v_3, en omdat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn (de matrix $Q = [id]_\gamma^\beta$ in deel (iv) heeft determinant $4 \neq 0$), is het beeld gelijk aan $\mathbb{R}^3$.

(iii) **(1 punt)** $T(v_0) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = v_1 + 2v_2$ en dit is geen veelvoud van $v_1 + v_2$, dus is v_0 geen eigenvector. Dit volgt net zo goed middels de matrix $D = [T]_\gamma^\gamma$ uit deel (i), maar dan moet v_0 wel als coördinatenvector $[v_0]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geschreven worden:

$$[T(v_0)]_\gamma = [T]_\gamma^\gamma [v_0]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Natuurlijk kan men de vectoren ook expliciet uitrekenen: $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $T(v_0) = v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en dit is geen veelvoud van v_0.

(iv) **(4 punten)** De matrix $Q = [id]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ kunnen we direct uit de gegeven vectoren aflezen.

We bepalen de inverse matrix $Q^{-1} = [id]_\beta^\gamma$ door $(Q \mid I_3)$ middels elementaire rijtransformaties op de vorm $(I_3 \mid Q^{-1})$ te brengen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{O_{21}(2), M_2(-1), P_{12}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{O_{32}(3), M_3(-1), P_{23}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{M_3(\frac{1}{4}), O_{31}(-1), O_{32}(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \underset{O_{21}(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Er geldt dus $Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Het is altijd een goed plan de berekende inverse te controleren door na te gaan of inderdaad $Q\,Q^{-1} = I_3$.

(v) **(2 punten)** Er geldt $A = [T]_\beta^\beta = [id]_\gamma^\beta\,[T]_\gamma^\gamma\,[id]_\beta^\gamma = QDQ^{-1}$ voor $D = [T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en $Q = [id]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (let op de volgorde van Q en Q^{-1}). De inverse matrix $Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ hebben we in deel (iv) al bepaald en hiermee vinden we

$$A = QDQ^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Alternatief kan men de vectoren van de standaardbasis direct als lineaire combinaties van

v_1, v_2, v_3 schrijven. Bijvoorbeeld is $v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en dus $v_1 + 2v_2 + v_3 = 2e_2$ en $v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 4e_3$. Analoog vind men $3v_1 + 2v_2 + v_3 = 4e_1$. Hieruit volgt

$$T(e_1) = \tfrac{1}{4}T(3v_1 + 2v_2 + v_3) = \tfrac{1}{4}(3v_1 + 4v_2 + 3v_3) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T(e_2) = \tfrac{1}{2}T(v_1 + 2v_2 + v_3) = \tfrac{1}{2}(v_1 + 4v_2 + 3v_3) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T(e_3) = \tfrac{1}{4}T(v_1 + 2v_2 + 3v_3) = \tfrac{1}{4}(v_1 + 4v_2 + 9v_3) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Als matrix $A = [T]_\beta^\beta$ vind men zo opnieuw $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Een verdere methode is de 9 elementen van $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ als onbekenden te beschouwen. Dan geven de drie vergelijkingen $Av_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$, $Av_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2v_2$ en $Av_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3v_3$ een stelsel lineaire vergelijkingen met 9 vergelijkingen en 9 onbekenden, dat zich in drie stelsels met telkens 3 vergelijkingen en 3 onbekenden laat opsplitsen (één voor iedere rij van A): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Omdat alle drie stelsels dezelfde matrix hebben, laten ze zich in feite simultaan oplossen (d.w.z. dezelfde stappen brengen de matrix op echelon vorm). Ook het oplossen van deze stelsels levert de boven aangegeven matrix A op.

In ieder geval is het nuttig te controleren of voor de gevonden matrix A geldt dat $Av_1 = v_1$, $Av_2 = 2v_2$ en $Av_3 = 3v_3$ (wat voor de aangegeven matrix A inderdaad zo is).