Tentamen Operations Research (kans B)

Opgave 1. *(5 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

$$\text{maximaliseer } (x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4) \text{ voor } \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 & \leq & 4 \\ 2x_1 \qquad\;\; + x_3 - 4x_4 & \leq & 2 \\ -2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 & \leq & 1 \end{array} \text{ en } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

(i) Bepaal middels de simplex methode een optimale oplossing van dit LP-probleem.

Leg uit waarom deze optimale oplossing niet uniek is en geef een verdere optimale oplossing aan.

(ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing aan.

Beargumenteer waarom de optimale oplossing van het duale probleem wel uniek is.

Oplossing:

(i) We voeren slackvariabelen x_5, x_6, x_7 in en passen de simplex methode toe:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & -\frac{5}{2} & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & -\frac{5}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -\frac{9}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -\frac{13}{2} & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 12 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Hieruit lezen we de optimale oplossing $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ van het LP-probleem af, de maximale waarde van de doelfunctie is 4.

Deze oplossing is niet uniek, want de coëfficiënt van de doelfunctie bij de niet-basisvariabel x_6 is 0, dus kan deze variabel gewijzigd worden zonder de waarde van de doelfunctie te veranderen. Omdat x_6 de slackvariabele van de tweede ongelijkheid is, heeft een waarde $x_6 > 0$ het effect dat deze ongelijkheid niet meer scherp is (wat ze bij $x_6 = 0$ wel is). Omdat alle coëfficiënten in de kolom van x_6 negatief zijn, kunnen we x_6 zelfs willekeurig groot maken, dit geeft voor iedere waarde $x_6 = t \geq 0$ een nieuwe optimale oplossing $x_1 = 7 + \frac{t}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3 + \frac{t}{2}$. De waarde van de slackvariabel x_7 is dan $12 + \frac{t}{2} > 0$, dit betekent dat de derde ongelijkheid voor geen van deze optimale oplossingen scherp is.

(iii) Het duale probleem is

$$\text{minimaliseer } (4y_1 + 2y_2 + y_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 - 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + y_3 & \geq & -2 \\ -2y_1 + y_2 & \geq & -3 \\ -y_1 - 4y_2 + y_3 & \geq & -1 \end{array} \text{ en } y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Omdat $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$ een optimale oplossing van het originele probleem is, waarbij de tweede en derde ongelijkheden niet scherp zijn, geldt voor een optimale oplossing van het duale probleem dat $y_2 = y_3 = 0$. Maar dan volgt (uit de eerste en vierde ongelijkheden) rechtstreeks dat $y_1 = 1$ en dit laat zien dat de oplossing van het duale probleem uniek is.

Alternatief kunnen we argumenteren dat het originele probleem een optimale oplossing heeft met $x_1, x_4 > 0$, daarom moeten de eerste en de vierde ongelijkheden van het duale probleem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

scherp zijn, d.w.z. een optimale oplossing van het duale probleem voldoet aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Optellen van deze twee vergelijkingen geeft $-2y_2 - y_3 = 0$ en dit kan voor $y_2, y_3 \geq 0$ alleen als $y_2 = y_3 = 0$. Ook hier volgt dan natuurlijk weer $y_1 = 1$ voor een optimale oplossing.

Opgave 2. *(6 punten)*
Een *transportprobleem* draait typisch om de vraag, goederen van verschillende fabrieken naar verschillende klanten te vervoeren. We gaan uit van een enkele soort product. Stel we hebben m fabrieken en n klanten. Fabriek no. i heeft een maximale productiecapaciteit van A_i eenheden en klant no. j heeft een vraag van B_j eenheden. De transportkosten van fabriek no. i naar klant no. j zijn $c_{ij} \geq 0$ per eenheid.
Gezocht is nu een *verdelingsplan* met minimale kosten zodat iedere klant de juiste hoeveelheid producten krijgt en geen fabriek boven de capaciteitsgrens produceert. Zo'n verdelingsplan is gegeven door de hoeveelheid producten x_{ij} die van fabriek no. i naar klant no. j getransporteerd wordt.

(i) Formuleer het vinden van een optimaal verdelingsplan als LP-probleem.

(ii) Laat zien dat de randvoorwaarden van het probleem de noodzakelijke voorwaarde impliceren dat de totale productiecapaciteit $\sum_{i=1}^{m} A_i$ van alle fabrieken samen minstens even groot is als de totale vraag $\sum_{j=1}^{n} B_j$ van alle klanten samen.

(iii) Laat zien dat er altijd een verdelingsplan bestaat als aan de noodzakelijke voorwaarde uit deel (ii) voldaan is.

Bewijs met behulp hiervan dat er voor het transportprobleem een optimaal verdelingsplan bestaat dan en slechts dan als aan de noodzakelijke voorwaarde $\sum_{i=1}^{m} A_i \geq \sum_{j=1}^{n} B_j$ voldaan is.

Hint: Om een toelaatbare oplossing te vinden, laat iedere fabriek producten volgens haar aandeel aan de totale productiecapaciteit van alle fabrieken samen naar iedere klant sturen.

(iv) Formuleer het duale LP-probleem.

Leg uit waarom ook het duale LP-probleem een eindige optimale oplossing heeft.

Oplossing:

(i) De variabelen in een verdelingsplan zijn x_{ij} voor $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, de doelfunctie die geoptimaliseerd dient te worden is

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

onder de randvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq A_i \text{ voor } 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \text{ voor } 1 \leq j \leq n, \quad x_{ij} \geq 0.$$

(ii) Als aan de randvoorwaarden $\sum_j x_{ij} \leq A_i$ en $\sum_i x_{ij} = B_j$ voldaan is, volgt

$$\sum_{j=1}^{n} B_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} A_i$$

dus is de noodzakelijke voorwaarde $\sum_{j=1}^{n} B_j \leq \sum_{i=1} A_i$ inderdaad een gevolg van de randvoorwaarden.

(iii) Zij $A := \sum_{i=1}^{m} A_i$ de totale productiecapaciteit van alle fabrieken samen en $q_i := \dfrac{A_i}{A}$ het aandeel van fabriek no. i aan de totale productiecapaciteit. Dan is $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$. Definieer nu $x_{ij} := q_i B_j$, d.w.z. iedere fabriek stuurt het deel van de vraag van klant no. j dat met haar aandeel q_i van de totale productiecapaciteit correspondeert. Dan is aan de ene kant $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = (\sum_{i=1}^{m} q_i) B_j = B_j$, d.w.z. aan de vraag van klant no. j wordt precies voldaan. Aan de andere kant is $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = q_i(\sum_{j=1}^{n} B_j) \leq q_i A = A_i$, d.w.z. fabriek no. i produceert niet boven haar maximale capaciteit.

We hebben al in deel (ii) bewezen dat het bestaan van een verdelingsplan (dus ook van een optimaal verdelingsplan) de voorwaarde $\sum_{i=1}^{m} A_i \geq \sum_{j=1}^{n} B_j$ impliceert. Omgekeerd hebben we nu laten zien dat er een verdelingsplan bestaat als aan deze voorwaarde voldaan is. Maar wegens $c_{ij} \geq 0$ en $x_{ij} \geq 0$ is de doelfunctie naar beneden begrensd (door 0), dus kan het optimum niet onbegrensd zijn. Verder geldt ook dat het toelaatbare gebied van het probleem begrensd is, want $0 \leq x_{ij} \leq A_i$. Als er dus überhaupt een verdelingsplan bestaat (het toelaatbare gebied dus niet leeg is), dan is er ook een optimaal verdelingsplan.

(iv) Het duale probleem heeft $m+n$ variabelen $y_1, \ldots, y_m$ en $z_1, \ldots, z_n$ met $y_i \leq 0$ en $z_j \in \mathbb{R}$. Het is echter handiger om de eerste m variabelen met $-y_i$ te noteren, dan is $y_i \geq 0$. De doelfunctie van het duale probleem is dan

$$\max - \sum_{i=1}^{m} A_i y_i + \sum_{j=1}^{n} B_j z_j$$

en de randvoorwaarden zijn

$$-y_i + z_j \leq c_{ij} \quad \text{voor} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Omdat het originele (primale) probleem een eindig optimum heeft, is volgens de dualiteitsstelling ook het duale probleem oplosbaar met een eindig optimum.

Het is duidelijk dat voor het duale probleem te triviale oplossing met $y_i = z_j = 0$ voor alle i, j toelaatbaar is.

Opgave 3. *(3 punten)*
Een *project* is een verzameling I van deeltaken en een *projectplan* bestaat uit het vastleggen van de begintijdstippen van de deeltaken $i \in I$. Hierbij dient het volgende in acht te worden genomen:

- Iedere deeltaak $i \in I$ heeft een zekere looptijd $t_i \geq 0$.
- Voor iedere deeltaak i zijn er zekere deeltaken die voltooid moeten zijn voordat deeltaak i kan beginnen (de muren van een huis kunnen pas worden geschilderd nadat ze zijn gemetseld). De verzameling van deeltaken die voor i voltooid moeten zijn, noemen we V_i (denk aan *voorganger*).

De totale duur van het project is natuurlijk de tijd tussen de start van de eerste deeltaak en het einde van de laatste deeltaak en een optimaal projectplan minimaliseert de totale duur van het project.

Modelleer het vinden van een optimaal projectplan als een LP-probleem. Wat zijn de variabelen, wat is de doelfunctie en wat zijn de randvoorwaarden?

Oplossing: Het is handig twee speciale deeltaken te definiëren: het *projectbegin* $b \in I$ en het *projecteinde* $e \in I$ die beide looptijd nul hebben, d.w.z. $t_b = t_e = 0$. Het projectbegin is een voorganger van iedere deeltaak, d.w.z. $b \in V_i$ voor iedere $i \neq b$, en iedere deeltaak is een voorganger van het projecteinde, d.w.z. $i \in V_e$ voor iedere $i \neq e$.
De variabelen van het LP-probleem zijn de begintijdstippen x_i van de deeltaken $i \in I$, de duur van het project is dan $x_e - x_b$. Voor het gemak definiëren we $x_b = 0$, dan moeten we gewoon de waarde van x_e minimaliseren.
De randvoorwaarden waaraan de x_i moeten voldoen zijn gegeven door

$$x_i \geq x_j + t_j \text{ voor } j \in V_i.$$

Wegens $x_b = 0$ en $b \in V_i$ voor alle $i \neq b$ is dan automatisch $x_i \geq x_b + t_b = 0$ voor alle $i \neq b$.