Operations Research (WB094) **14 januari 2021**

Tentamen Operations Research (kans B)

Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student. Zo nodig zal de zaak worden doorverwezen naar de examencommissie.

Upload aan het begin van het tentamen de verklaring dat je alleen de toegelaten hulpmiddelen gaat gebruiken.

Vergeet niet je uitwerkingen vóór het uploaden met je naam te voorzien en duidelijk te nummeren zo dat het ingeleverde werk in een zinvolle volgorde gebracht kan worden.

Opgave 1. *(9 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

$$\text{maximaliseer } (5x_2+x_3+4x_4) \text{ voor } \begin{array}{rcl} -x_1+5x_2+2x_3+5x_4 & \leq & 4 \\ 3x_2 \qquad\qquad +x_4 & = & 2 \\ -x_1 \qquad\quad +x_3+2x_4 & = & 1 \end{array} \text{ met } x_1,x_2,x_4 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}.$$

(i) Bepaal *middels het Simplex algoritme* een optimale oplossing van dit LP-probleem.

(ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

(iii) Zijn de optimale oplossingen van het originele LP-probleem en van het duale probleem eenduidig?

Zo niet, geef ook een andere optimale oplossing, zo wel, leg uit waarom.

Oplossing:

(i) We voegen voor de eerste ongelijkheid een slack variabele x_5 toe, voor de tweede en derde vergelijking hulpvariabelen y_1 en y_2 en vervangen de vrije variabele x_3 door twee variabelen $x_3^+, x_3^- \geq 0$ met $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. Met de te maximaliseren hulpfunctie $-y_1 - y_2$ en de originele doelfunctie krijgen we het volgende tableau dat we in een eerste stap naar een *tbo* voor de hulpfunctie transformeren en vervolgens de hulpfunctie optimaliseren.

$$\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3^+ & x_3^- & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & \\ \hline -1 & 5 & 2 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccccc|c} -1 & 5 & 2 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 3 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccccccc|c} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \end{array}$$

Hiermee is het hulpprobleem opgelost, en we vinden de initiële oplossing $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$ ($x_3^+ = 0$ en $x_3^- = 3$), $x_4 = 2$ van het originele LP-probleem.

We laten nu de hulpvariabelen y_1, y_2 en de hulpfunctie weg en gaan door met Fase II van het Simplex algoritme.

$$\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}$$

Hieruit lezen we de optimale oplossing $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 2$ af, waarvoor de doelfunctie de waarde 5 heeft. De optimale oplossing is in feite gelijk is aan de eerder gevonden initiële oplossing, het is een ontaarde oplossing, want voor de niet-basisvariabele x_5 geldt $x_5 = 0$.

(ii) Het duale probleem is

$$\text{minimaliseer } (4y_1 + 2y_2 + y_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} -y_1 \qquad - y_3 & \geq & 0 \\ 5y_1 + 3y_2 \qquad & \geq & 5 \\ 2y_1 \qquad + y_3 & = & 1 \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 4 \end{array} \text{ voor } y_1 \geq 0, y_2, y_3 \in \mathbb{R}.$$

Uit complementaire slackheid kunnen we in dit geval alleen afleiden dat de vierde ongelijkheid scherp moet zijn, omdat $x_4 > 0$. Echter kunnen we de derde gelijkheid gebruiken om de variabele y_3 te elimineren, hieruit resulteren de volgende drie randvoorwaarden voor een optimale oplossing:

$$y_1 \geq 1, \quad 5y_1 + 3y_2 \geq 5, \quad y_1 + y_2 = 2.$$

Hierbij is de tweede randvoorwaarde overbodig, want voor $y_1 \geq 1$ is $5y_1 + 3y_2 = 2y_1 + 3(y_1 + y_2) = 2y_1 + 6 \geq 8$.

Door invullen van $y_3 = 1 - 2y_1$ in de doelfunctie van het duale probleem vereenvoudig deze naar $2y_1 + 2y_2 + 1$ en deze heeft voor alle toegelaten oplossingen met $y_1 + y_2 = 2$ de waarde 5 (die volgens de dualiteitsstelling dus inderdaad optimaal zijn).

We concluderen dat iedere y_1, y_2, y_3 met $y_1 \geq 1$, $y_1 + y_2 = 2$ en $y_3 = 1 - 2y_1$ een optimale oplossing is van het duale probleem.

Het bepalen van een optimale oplossing van het duale probleem middels het Simplex algoritme zou in dit geval veel meer moeite kosten.

(iii) De optimale oplossing van het primale probleem is eenduidig omdat de getransformeerde doelfunctie bij de niet-basisvariabelen x_2 en x_5 negatief is (de variabele x_3^+ is aan de basisvariabele x_3^- gekoppeld).

Voor het duale probleem hebben we in deel (ii) al laten zien dat er verschillende optimale oplossingen bestaan, voorbeelden zijn $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$ en $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = -3$.

Opgave 2. *(7 punten)*
Gezocht is het *minimum* van $2|x-2| + 3|y-3|$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x+2| + |y-1| \leq 5$.

(i) Laat zien dat het toegelaten gebied $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+2| + |y-1| \leq 5\}$ een polytoop is.

(ii) Formuleer het gegeven probleem als LP-probleem.

(iii) Vind een optimale oplossing van het gegeven probleem (niet per se middels het Simplex algoritme).

(iv) De optimale oplossing ligt niet in een extreem punt van P.

Leg uit waarom dit geen tegenspraak is met de stelling dat een LP-probleem een optimale oplossing heeft in een extreem punt van het toegelaten gebied.

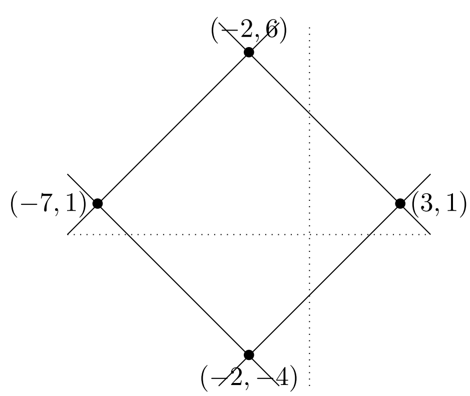
Oplossing:

(i) Wegens $|z| = \max(z, -z)$ is het toegelaten gebied P de doorsnede van de vier halfvlakken gedefinieerd door de vier ongelijkheden

$$(x+2)+(y-1) \leq 5, \quad -(x+2)+(y-1) \leq 5, \quad (x+2)-(y-1) \leq 5, \quad -(x+2)-(y-1) \leq 5$$

en dus het polytoop (in feite een vierkant) begrensd door de vier lijnen

$$x + y = 4, \quad -x + y = 8, \quad x - y = 2, \quad -x - y = 6.$$



(ii) Het toegelaten gebied is al middels de in deel (i) aangegeven lineaire ongelijkheden beschreven:

$$x + y \leq 4, \quad -x + y \leq 8, \quad x - y \leq 2, \quad -x - y \leq 6.$$

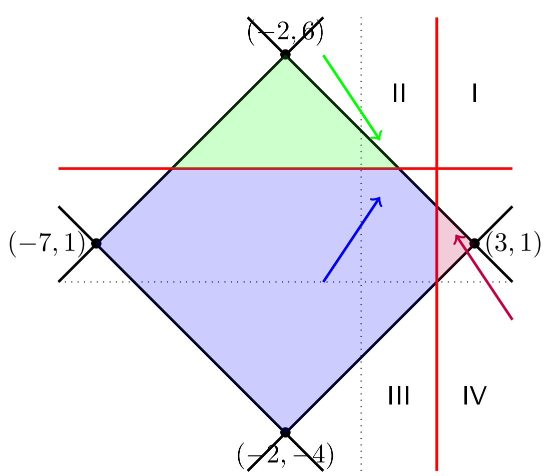
Nu moeten we alleen nog de doelfunctie lineariseren. Hiervoor introduceren we twee nieuwe variabelen, z en w, waarvoor geldt dat $z \geq |x-2|$ en $w \geq |y-3|$, dan is het doel het minimaliseren van de doelfunctie $2z+3w$. De niet-lineaire randvoorwaarden $z \geq |x-2|$ en $w \geq |y-3|$ lineariseren we hierbij door de randvoorwaarden $z \geq x-2$, $z \geq -(x-2)$ en $w \geq y-3$, $w \geq -(y-3)$. Het LP-probleem is dus:

$$\text{minimaliseer } 2z+3w \text{ voor } \begin{array}{lcr} x+y & \leq & 4 \\ -x+y & \leq & 8 \\ x-y & \leq & 2 \\ -x-y & \leq & 6 \\ x-z & \leq & 2 \\ -x-z & \leq & -2 \\ y-w & \leq & 3 \\ -y-w & \leq & -3 \end{array}$$

(iii) Afhankelijk van het teken van $x-2$ en van $y-3$ kunnen we het hele vlak $\mathbb{R}^2$ onderverdelen in vier kwadranten, waarop de doelfunctie telkens lineair is:

I: $x-2 \geq 0$, $y-3 \geq 0$: doelfunctie $2(x-2)+3(y-3) = 2x+3y-13$;
II: $x-2 \leq 0$, $y-3 \geq 0$: doelfunctie $-2(x-2)+3(y-3) = -2x+3y-5$;
III: $x-2 \leq 0$, $y-3 \leq 0$: doelfunctie $-2(x-2)-3(y-3) = -2x-3y+13$;
IV: $x-2 \geq 0$, $y-3 \leq 0$: doelfunctie $2(x-2)-3(y-3) = 2x-3y+5$;

Middels de richtingsvector van de doelfunctie kunnen we nu makkelijk op de doorsnede van ieder van de kwadranten met het toegelaten gebied P de optimale oplossing bepalen. Let op dat we op zoek zijn naar het minimum, daarom heeft bijvoorbeeld de doelfunctie $2x+3y-13$ richtingsvector $(-2,-3)$.



De optimale oplossing in de kwadranten II en III is telkens het punt $(1,3)$ (snijpunt van de lijnen $x+y=4$ en $y=3$) met waarde 2 voor de doelfunctie. De optimale oplossing in kwadrant IV is $(2,2)$, maar omdat dit ook een punt in kwadrant III is, is de waarde hier geen globaal minimum (de waarde is 3). De doorsnede van de kwadrant I met het toegelaten gebied is leeg.

Er is dus een uniek globaal minimum in het punt $(1,3)$.

(iv) Op het toegelaten gebied $P \subseteq \mathbb{R}^2$ is de doelfunctie geen lineaire functie, dit geldt alleen op de deelgebieden die begrensd zijn door de lijnen $x = 2$ en $y = 3$ en waarop dus $x - 2 \geq 0$ of $x - 2 \leq 0$ en $y - 3 \geq 0$ of $y - 3 \leq 0$ is.

Van deze deelgebieden is $(1, 3)$ wel een extreem punt, want hij voldoet aan de twee gelijkheden $x + y = 4$ en $y = 3$.

Als we naar de formulering als LP-probleem kijken (zie deel (ii)), correspondeert de oplossing $x = 1$, $y = 3$ wel met een extreem punt van het toegelaten gebied in $\mathbb{R}^4$, want we hebben dan $z = |x - 2| = 1$ en $w = |y - 3| = 0$ en deze oplossing ligt op de vier hypervlakken $x + y = 4$, $-x - z = -2$, $y - w = 3$ en $-y - w = -3$.

Opgave 3. *(6 punten)*
Voor de primale en duale problemen

$$\text{(P)}\ \max c^{tr}x \text{ voor } Ax \leq b, x \geq 0 \quad \text{en} \quad \text{(D)}\ \min b^{tr}y \text{ voor } A^{tr}y \geq c, y \geq 0$$

noteren we met $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ en $\mathcal{Q} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^{tr}y \geq c, y \geq 0\}$ de toegelaten gebieden van (P) en (D).

(i) Stel dat $\mathcal{P} \neq \emptyset$ en zij $e \in \mathbb{R}^n$ de vector met alle componenten gelijk aan 1.

Laat zien dat $\mathcal{P}$ begrensd is dan en slechts dan als $e^{tr}x$ begrensd is op $\mathcal{P}$.

(ii) Stel dat minstens één van (P) en (D) toelaatbaar is, d.w.z. minstens één van $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ is niet leeg.

Bewijs dat in dit geval minstens één van $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ onbegrensd is.

Hint: Bekijk het hulpprobleem (P*) $\max e^{tr}x$ voor $Ax \leq b$, $x \geq 0$ en zijn duaal probleem.

Oplossing:

(i) Als $\mathcal{P}$ begrensd is, is er een $M \geq 0$ met $x_i \leq M$ voor alle $x \in \mathcal{P}$ en dan is $e^{tr}x = \sum_{i=1}^n x_i \leq nM$ voor alle $x \in \mathcal{P}$.

Stel omgekeerd dat er $M \geq 0$ bestaat met $e^{tr}x \leq M$ voor alle $x \in \mathcal{P}$. Wegens $x \geq 0$ is dan i.h.b. $x_i \leq M$ en dus is $\mathcal{P}$ begrensd.

(ii) Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $\mathcal{P} \neq \emptyset$ want door vervangen van A, b, c door $-A, -b, -c$ vervangen we (D) door het primale probleem (P') $\max(-b)^{tr}y$ voor $-A^{tr}y \leq -c$, $y \geq 0$ met toegelaten gebied $\mathcal{Q}$ en (P) door het bijhorende duale probleem (D') $\min(-c)^{tr}x$ voor $-Ax \geq -b$, $x \geq 0$ met toegelaten gebied $\mathcal{P}$.

Als $\mathcal{P}$ onbegrensd is, zijn we klaar, dus nemen we aan dat $\mathcal{P}$ begrensd is. Volgens deel (i) is $e^{tr}x$ begrensd op $\mathcal{P}$, dus heeft het hulpprobleem (P*) $\max e^{tr}x$ voor $Ax \leq b$, $x \geq 0$ een eindige optimale oplossing. Volgens de dualiteitsstelling heeft dan ook het duale probleem (D*) $\min b^{tr}y$ voor $A^{tr}y \geq e$, $y \geq 0$ een eindige optimale oplossing y^*. Wegens $A^{tr}y^* \geq e > 0$ geldt $y^* \neq 0$, d.w.z. $y^*_i > 0$ voor minstens één van de componenten van y^*. Voor $\lambda \geq 0$ geldt dan $A^{tr}(\lambda y^*) \geq \lambda e$ en voor voldoende grote λ, namelijk $\lambda \geq \max(0, c_1, \ldots, c_n)$, is $\lambda e \geq c$. Dit betekent dat $\lambda y^* \in \mathcal{Q}$ voor alle $\lambda \geq \max(0, c_1, \ldots, c_n)$ en wegens $y^* \neq 0$ is $\mathcal{Q}$ dan onbegrensd.