Hertentamen Maattheorie, Najaar 2018/19

Michael Müger

03.04.2019, 12:30-15:30 (16:00)

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine, telefoon, tablet, etc.) gebruiken behalve het boek "Measure theory" van D. L. Cohn (of kopieën ervan).
- Als je stellingen uit het boek gebruikt, geef volledige referenties, waarbij je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is. Naar stellingen of huiswerkopgaven in het boek mag alleen verwezen worden als die dit semester daadwerkelijk behandeld/opgegeven zijn.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de volgende delen wel te maken.
- In het totaal zijn er 50 punten te bereiken. ≥ 28 punten is zeker voldoende.

Opgave 1 (5+5 pt) Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Voor $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, definieer

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \qquad \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

(i) Bewijs dat $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.

(ii) Stel dat $\mu(\cup_n A_n) < \infty$. Bewijs dat $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)$.

Opgave 2 (5+5 pt) Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en ν een eindige reëelwaardige maat op $(X, \mathcal{A})$. Bewijs:

(i) Als $\{A_n\}$ een stijgende rij meetbare verzamelingen is, dan is

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

(ii) Als $\{A_n\}$ een dalende rij meetbare verzamelingen is, dan is

$$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (2+2+2+2+2 pt) Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte, zijn ν, ν_1, ν_2 reëelwaardige maten en zij μ positieve maat op $(X, \mathcal{A})$. Bewijs:

(i) Als $\nu_1 \perp \mu$ en $\nu_2 \perp \mu$ dan $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(ii) Als $\nu_1 \ll \mu$ en $\nu_2 \ll \mu$ dan $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(iii) Als $\nu_1 \perp \nu_2$ dan $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(iv) $\nu \ll |\nu|$.

(v) Als $\nu \perp \mu$ en $\nu \ll \mu$ dan $\nu = 0$.

Opgave 4 (8 pt) Stel $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ is Lebesgue integreerbaar. Voor $0 < x \leq b$ definieer

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt.$$

Bewijs dat $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue integreerbaar is en

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt.$$

Opgave 5 (3+9 pt) Bekijk de volgende $\mathbb{R}$-waardige functies op het interval $[0, 1]$:

$$A_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad B_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}, \qquad C_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Bewijs dat alle drie rijen van functies op $[0, 1]$ puntsgewijs naar nul gaan als $n \to \infty$.

(ii) Geldt $\int_0^1 A_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$? $\qquad \int_0^1 B_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$? $\qquad \int_0^1 C_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$?

Waar je antwoord 'ja' is, geef een bewijs zonder expliciete berekening van de integralen. Waar je antwoord 'nee' is, bepaal de limiet van de integralen voor $n \to \infty$.