Tentamen Maattheorie, Najaar 2018/19

Michael Müger

11.01.2019, 08:30-11:30 (12:00)

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine, telefoon, tablet, etc.) gebruiken behalve het boek "Measure theory" van D. L. Cohn (of copieën ervan).
- Als je stellingen uit het boek gebruikt, geef volledige referenties, waarbij je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is. Naar stellingen of huiswerkopgaven in het boek mag alleen verwezen worden als die dit semester daadwerkelijk behandeld/opgegeven zijn.
- Als een deelopdracht niet lukt mag je het resultaat veronderstellen om de volgende delen wel te maken.
- In het totaal zijn er 43 punten te bereiken. ≥ 24 punten zijn zeker voldoende.

Opgave 1 (7=5+2 pt) Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte.

(i) Stel $\{\mu_n\}$ is een rij maten op $(X, \mathcal{A})$ die stijgend is in de zin dat $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

een maat op $(X, \mathcal{A})$ definieert.

(ii) Zij $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een willekeurige rij maten op $(X, \mathcal{A})$. Bewijs dat $\mu(A) = \sum_n \mu_n(A)$ een maat op $(X, \mathcal{A})$ definieert.

Opgave 2 (10=5+5 pt) Bekijk de rijen

$$a_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx, \qquad b_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx$$

(i) In elk van de twee gevallen geef een integreerbare positive functie aan die de integrand voor alle $n \in \mathbb{N}$ domineert.

(ii) Gebruik de gedomineerde convergentiestelling om $\lim_{n\to\infty} a_n$ en $\lim_{n\to\infty} b_n$ te bepalen.

Bewijs je beweringen!

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (8=2+2+4 pt) Definieer een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$f(0,0) = 0 \quad \text{en} \quad f(x,y) = \frac{\operatorname{sign}(xy)}{x^2+y^2} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0).$$

Hierbij is $\operatorname{sign}(x) = 1$ als $x > 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$ en $\operatorname{sign}(x) = -1$ als $x < 0$.

(i) Bewijs dat $f_x, f^y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voor elk x, y Lebesgue integreerbaar zijn.

(ii) Bewijs dat de functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda(y)$ en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_y d\lambda(x)$ Lebesgue integreerbaar zijn en er geldt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

(iii) Bewijs dat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ niet Lebesgue integreerbaar is.

LET OP: We hebben geen stelling over coordinatentransformaties in hogerdimensionale Lebesgueintegralen bewezen.

Opgave 4 (10=2+3+5 pt) Zij μ een complexe maat op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Voor elk $A \in \mathcal{A}$ definieer

$$\begin{aligned} |\mu|_f(A) &= \sup \left\{ \sum_i |\mu(A_i)| \mid \{A_i\} \text{ eindige partitie van } A \right\}, \\ |\mu|_c(A) &= \sup \left\{ \sum_i |\mu(A_i)| \mid \{A_i\} \text{ aftelbare partitie van } A \right\}. \end{aligned}$$

Het boek van Cohn volgend hadden wij $|\mu| := |\mu|_f$ de variatiemaat van μ genoemd en bewezen dat dit een eindige reëel maat is. Veel auteurs definiëren echter $|\mu| := |\mu|_c$.

(i) Bewijs $|\mu|_f \leq |\mu|_c$.

(ii) Leg uit waarom het bewijs van Cohn voor eindigheid van $|\mu|_f$ ook voor $|\mu|_c$ werkt.

(iii) Bewijs dat $|\mu|_f = |\mu|_c$.
Hint: Neem aan dat $|\mu|_f(A) < |\mu|_c(A)$ voor een $A \in \mathcal{A}$ en laat zien dat dit tot een contradictie leidt.

Opgave 5 (8=3+3+2 pt) Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eindige maatruimte en $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ een deel-σ-algebra.

(i) Construeer een functie $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ (dus meetbaar t.o.v. $\mathcal{B}$!) waarvoor geldt $\int_B g d\mu = \int_B f d\mu$ voor alle $B \in \mathcal{B}$. Hint: Radon-Nikodym.

(ii) Laat zien dat g uniek is op verandering op een verzameling van maat nul na en dat $[g] \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ alleen van $[f] \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ afhangt.

(iii) Laat zien dat de door (i),(ii) gedefinieerde afbeelding $L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}) \to L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ lineair is.

Oplossing 1 (i) It is clear that $\mu(A) \geq 0$ for each $A \in \mathcal{A}$ and that $\mu(\emptyset) = 0$. To check countable additivity, let $\{A_m\} \subseteq \mathcal{A}$ be a countable family of mutually disjoint sets. Then

$$\mu(\bigcup_m A_m) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\bigcup_m A_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_m \mu_n(A_m) \stackrel{*}{=} \sum_m \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) = \sum_m \mu(A_m).$$

The first and last identies hold by definition of μ, while the second is due to countable additivity of each μ_n. Thus it remains to prove the one marked $*$. The latter can be seen as a very special case of Lebesgue's monotone convergence theorem. A direct proof goes as follows: Since $n \mapsto \mu_n(A_m)$ is increasing for each m, we have $\mu_n(A_m) \leq \lim_k \mu_k(A_m)$ for all n. Summing over m gives $\sum_m \mu_n(A_m) \leq \sum_m \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m)$, and with $n \to \infty$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \sum_m \mu_n(A_m) \leq \sum_m \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m). \tag{1}$$

And for every M we have (since limits and finite sums commute)

$$\sum_{m=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \mu_n(A_m) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A_m),$$

and taking $M \to \infty$ we have the inequality opposite to (1).

(ii) Define $\nu_n = \sum_{k=1}^n \mu_k$. A finite sum of positive measures clearly is a positive measure, and $n \mapsto \nu_n$ is monotonously increasing. Now $\sum_n \mu_n = \lim_{n\to\infty} \nu_n$ is a measure by (i).

Oplossing 2 In view of $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, the integrands converge pointwise to $e^x e^{-2x} = e^{-x}$ and $e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}$, respectively. In the limit, the integrations go over $[0, \infty)$ and we obtain $a_n \to 1$ and $b_n \to 2$, respectively, provided we can justify taking the limit under the integral sign. In the first case, we note that $(1 + x/n)^n \leq e^x$ for all n and all $x \geq 0$. This is seen by taking n-th roots: $1 + x/n \leq 1 + x/n + (x/n)^2/2! + \cdots = e^{x/n}$. (We could also estimate $(1 + \frac{x}{n})^n$ directly, using the binomial formula, but this is much more work.) In view of

$$a_n = \int_0^n (1 + x/n)^n e^{-2x} d\lambda = \int_0^\infty \chi_{[0,n]}(1 + x/n)^n e^{-2x} d\lambda,$$

it is clear that the integrand is dominated for all n and $x \geq 0$ by the integrable function $g(x) = e^x e^{-2x} = e^{-x}$. Now we can apply Lebesgue's dominated convergence theorem.

The second limit is a bit more delicate. It certainly is not true that $(1-x/n)^n e^{x/2}$ is bounded by $e^{-x/2}$ for all n and $x \geq 0$, for the simple reason that both factors grow rapidly as $x \to +\infty$. But for our purposes it suffices that $(1 - x/n)^n \leq e^{-x}$ for all n and all $x \in [0, n]$. As before, this is equivalent to $1 - x/n \leq e^{-x/n}$ for $x \in [0, n]$. Now

$$1 - \frac{x}{n} \leq 1 - \frac{x}{n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots = e^{-x/n},$$

where we used that $k \mapsto (x/n)^k/k!$ is decreasing for $x \in [0, n]$. Now we have

$$\chi_{[0,n]}(x)(1 - x/n)^n e^{x/2} \leq e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2} := g(x) \quad \forall n, x \geq 0,$$

where g is integrable, as needed.

Oplossing 3 (i) If $x = 0$ then $f_x \equiv 0$, which is integrable. If $x \neq 0$ then f_x is measureable and $y \mapsto |f_x(y)| = 1/(x^2 + y^2)$ is integrable due to the inverse square decay. We have $\int f_x d\lambda(y) = 0$ since the two quadrants through which the line $\{x\} \times \mathbb{R}$ runs make opposite contributions to the integral. Similarly for f^y.

(ii) This is trivial since all the integrals are zero.

(iii) It suffices to prove $\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} (x^2 + y^2)^{-1} d(\lambda \times \lambda) = +\infty$. (Since $|f|$ is non-negative, Tonelli's theorem applies and the integral over the product measure equals the two iterated integrals.) Using polar coordinates, this integral equals $\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{-2} r d\phi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r} = \infty$. But we haven't proven such a result for the Lebesgue integral. (Cf. Chapter 6 in Cohn's book.) Here is an alternative approach, where we use that the one-dimensional Lebesgue integral of a 'nice' function coincides with the (improper) Riemann integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + y^2} d\lambda(x) d\lambda(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y^2(1 + (x/y)^2)} dx dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \int_0^\infty \frac{y}{(1 + (x/y)^2)} d(x/y) dy \\ &= C \int_0^\infty \frac{dy}{y} = \infty, \end{aligned}$$

where $0 < C = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} < \infty$. (Actually, $C = \pi/2$.)

Oplossing 4 (i) Every finite partition of A can be extended (by empty sets) to a countable partition. Thus there are more countable partitions than finite ones, and the claim follows immediately.

(ii) The proof given by Cohn for $|\mu|_f$ also works for $|\mu|_c$! Here in all details: Define $\nu_1(A) = \mathrm{Re}(\mu(A)), \nu_2(A) = \mathrm{Im}(\mu(A))$. Then ν_1, ν_2 are finite real measures on $(X, \mathcal{A})$ such that $\mu = \nu_1 + i\nu_2$. With the Jordan decompositions $\nu_1^\pm, \nu_2^\pm$ of ν_1, ν_2, respectively, we have $\mu = \nu_1^+ - \nu_1^- + i\nu_2^+ - i\nu_2^-$. If $\{A_n\}$ is a countable partition of $A \in \mathcal{A}$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty |\mu(A_n)| &= \sum_{n=1}^\infty |\nu_1^+(A_n) - \nu_1^-(A_n) + i\nu_2^+(A_n) - i\nu_2^-(A_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \nu_1^+(A_n) + \nu_1^-(A_n) + \nu_2^+(A_n) + \nu_2^-(A_n) \\ &= \nu_1^+(A) + \nu_1^-(A) + \nu_2^+(A) + \nu_2^-(A), \end{aligned}$$

where we used the countable additivity of $\nu_1^\pm, \nu_2^\pm$. Thus

$$|\mu|_c(A) \leq \nu_1^+(X) + \nu_1^-(X) + \nu_2^+(X) + \nu_2^-(X) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

(Remark: Most textbooks prove this using tools that are more elementary than the Jordan decomposition, but this also requires some work.)

(iii) Assume there is an $A \in \mathcal{A}$ such that $|\mu|_f(A) < |\mu|_c(A)$. We can find a countable partition $\{A_i\}$ of A with $\sum_i |\mu(A_i)|$ arbitrarily close to $|\mu|_c(A)$. In particular we can achieve

$$\sum_{i=1}^\infty |\mu(A_i)| > |\mu|_f(A). \tag{2}$$

Now $\left\{A_1, A_2, \ldots, A_N, \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right\}$ is a finite partition of A, thus

$$\sum_{n=1}^{N} |\mu(A_n)| \ \leq \ \sum_{n=1}^{N} |\mu(A_n)| + \left|\mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right)\right| \ \leq \ |\mu|_f(A).$$

Since this holds for all N, it implies $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \leq |\mu|_f(A)$, contradicting (2). This contradiction proves $|\mu|_f = |\mu|_c$.

Oplossing 5 (i) For $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ define $\nu(B) = \int_B f d\mu$. This defines a finite real measure on $(X, \mathcal{A})$. The restrictio $\nu \restriction \mathcal{B}$ is a finite real measure on $(X, \mathcal{B})$. If $\mu(B) = 0$ then $\nu(B) = 0$, thus $\nu << \mu \restriction \mathcal{B}$. With the Radon-Nikodym theorem there is a function $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ such that $\int_B g d\mu = \nu(B) = \int_B f d\mu$ for all $B \in \mathcal{B}$.

(ii) The Radon-Nikodym theorem also gives that any other $g' \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ with $\int_B g' d\mu = \nu(B)$ for all $B \in \mathcal{B}$ equals g almost everywhere. Thus $[g'] = [g]$ in $L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$. If $f' \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ such that $f = f'$ a.e. and $\nu'(B) := \int_B f' d\mu$ then $\nu' = \nu$. Thus ν, and therefore $[g]$, depends only on the class $[f] \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(iii) Let $[f_1], [f_2] \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. If $[g_1], [g_2]$ be the images under P. If $a, b \in \mathbb{R}$ then $[ag_1 + bg_2]$ clearly is the element of $L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ corresponding to $a[f_1] + b[f_2]$.