Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 (WP001B)
28 maart 2019, 08:30–11:30 (12:00)

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon of tablet is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van aantekeningen of boeken, het boek van Garling ingesloten. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk. Als een deelopdracht niet lukt mag u het resultaat veronderstellen om de volgende delen wel te maken.

---

1. (i) Zij $x \geq -1$. Bewijs dat $1 + nx \leq (1+x)^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
   (ii) Zij $a \geq 1$. Schrijf $a^{1/n} = 1 + y_n$ en bewijs dat $y_n \geq 0$ voor alle n.
   (iii) Gebruik (i) om te bewijzen dat $y_n \leq \frac{a-1}{n}$, en concludeer dat $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

2. (i) Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Geef de definities van $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$, en van $\lim_{n\to\infty} a_n$.
   (ii) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat d.e.s.d.a. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

3. Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij positieve getallen zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert.
   (i) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   (ii) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

4. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie.
   (i) Bewijs dat f begrensd is.
   (ii) Bewijs dat er $x_1, x_2 \in [a,b]$ zijn met $f(x_1) = \sup(f([a,b]))$, $f(x_2) = \inf(f([a,b]))$.
   (iii) Stel bovendien dat $f(a) = f(b)$ en dat f differentieerbaar is op (a,b). Bewijs dat er een $x \in (a,b)$ is met $f'(x) = 0$.

5. Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ continu. Bewijs dat er een $x \in [0,1]$ is met $f(x) = x$.
   Hint: Bekijk de functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$.

Z.O.Z.

6. Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$, en bekijk de machtreeksen

$$\begin{aligned} f(\overset{z}{\cancel{x}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\ g(\overset{z}{\cancel{x}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \end{aligned}$$

(i) Bewijs dat de twee machtreeksen dezelfde convergentiestraal R hebben.

(ii) Voor $z, h \in \mathbb{C}$ bewijs:

$$(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}.$$

(iii) Zij $z \in \mathbb{C}$ en $H > 0$. Bewijs voor alle $h \in \mathbb{C}$ met $|h| < H$ dat

$$\left|(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}\right| \leq \frac{|h|^2}{H^2}(|z| + H)^n.$$

(iv) Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < R$, gebruik (ii),(iii) om te bewijzen dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z).$$

(Dus de machtreeks is differentieerbaar op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, en de afgeleide wordt verkregen door de machtreeks voor f onder het somteken te differentieren.)

Normering								
Opgave	1	2	3	4	5	6	Gratis	Totaal
Punten	7	7	8	8	5	10	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.

Uitwerking

1. (i) Voor $n = 1$ is dit triviaal. Inductie: Stel de uitspraak geldt voor n, dus $1 + nx \leq (1 + x)^n$. Vermenigvuldig met $(1 + x)$. Dit is ≥ 0, dus

$$1 + (n + 1)x \leq 1 + (n + 1)x + nx^2 = (1 + nx)(1 + x) \leq (1 + x)^{n+1},$$

en de inductie is klaar.

(ii) Stel $y_n < 0$. Dan is $a^{1/n} = 1 + y_n < 1$. Verheffen tot de n-de macht is monotoon, dus geeft $a < 1^n = 1$, wat de aanname tegenspreekt.

(iii) Met (i) geldt $1 + ny_n \leq (1 + y_n)^n = a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus $0 \leq y_n \leq \frac{a-1}{n}$. Met het sandwichprincipe volgt $\lim_n y_n = 0$, dus $a^{1/n} \to 1$.

2. Zie Garling.

3. (i) Dit is nagenoeg triviaal: Garling Proposition 4.1.4.

(ii) Wat volgt is maar een bewijs! Er zijn andere manieren om dit te doen!

Stel $na_n \not\to 0$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ waarvoor oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ bestaan met $na_n \geq \varepsilon$. Dan kunnen we een rij $n_1 < n_2 < \cdots$ vinden zodanig dat $n_i a_{n_i} \geq \varepsilon$ voor alle i **en** $n_{i+1} \geq 2n_i$. (Juist omdat $na_n \geq \varepsilon$ voor oneindig veel n.) Omdat $\{a_n\}$ dalend is geldt

$$a_n \geq a_{n_i} \geq \frac{\varepsilon}{n_i} \quad \forall n \leq n_i.$$

Hieruit volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{i=2}^{\infty} (n_i - n_{i-1}) \frac{\varepsilon}{n_i} = \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{n_{i-1}}{n_i}\right) \geq \varepsilon \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty,$$

we we $n_{i+1} \geq 2n_i$ gebruikt hebben, waaruit volgt dat $\frac{n_{i-1}}{n_i} \leq \frac{1}{2}$, dus $1 - \frac{n_{i-1}}{n_i} \geq \frac{1}{2}$.

4. Zie Garling.

5. Definieer $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x - f(x)$. Dan is $g(0) = -f(0) \leq 0$ en $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$. Met de tussenwaardestelling is er een $x \in [0, 1]$ met $g(x) = 0$. Dus $f(x) = x$.

6. (i) Zoals we weten is de convergentiestraal R van $\sum_n a_n z^n$ gegeven door $R^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}$. De machtreeks $\sum_n na_n z^{n-1}$ heeft duidelijk dezelfde convergentiestraal R' als $\sum_n na_n z^n$, zodat we voor het gemak deze bekijken. Nu is $(R')^{-1} = \limsup |na_n|^{1/n}$. We weten (huiswerk) dat $n^{1/n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. We weten ook (opgave 3.5.5) dat uit $a_n, b_n > 0$ en $a_n \to a$ volgt dat $\limsup(a_n b_n) = a \limsup b_n$. Dus

$$(R')^{-1} = \limsup |na_n|^{1/n} = \left(\lim n^{1/n}\right) \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right) = \limsup |a_n|^{1/n} = R^{-1}.$$

(ii) Dit volgt onmiddelijk uit de formule

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}$$

voor het binomium gezien de termen met $k = 0$ en $k = 1$ gelijk zijn aan z^n en nhz^{n-1}, respectievelijk.

(iii) We schatten als volgt

$$\begin{aligned}
\left|(z+h)^n - z^n - nhz^{n-1}\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \left|\binom{n}{k} h^k z^{n-k}\right| = |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2}|z|^{n-k} \\
&\leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} H^{k-2}|z|^{n-k} = \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} H^k|z|^{n-k} \\
&\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H^k|z|^{n-k} = \frac{|h|^2}{H^2}(|z|+H)^n,
\end{aligned}$$

waar we (ii) gebruikt hebben, de driehoeksongelijkheid en $|h| < H$.

(iv) Als $|z| < R, H < R - |z|, |h| < H$ dan zijn de reeksen $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n a_n(z+h)^n$ en $\sum_n n a_n z^{n-1}$ alle convergent (zie (i)). Met (ii) krijgen we

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k}
\end{aligned}$$

Met (iii) volgt

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| \leq \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z|+H)^n.$$

Uit $|z| + H < R$ volgt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z|+H)^n$ (die van h onafhankelijk is!) convergeert. Nu is duidelijk dat de rechterkant van de ongelijkheid naar nul gaat als $h \to 0$, dus ook de linkerkant.