Tentamen Ringen en Lichamen op 2 april 2020 (kans A)

Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student. Zo nodig zal de zaak worden doorverwezen naar de examencommissie.

Vergeet niet je bladeren vóór het uploaden met je naam te voorzien en duidelijk te nummeren zo dat het ingeleverde werk in een zinvolle volgorde gebracht kan worden.

Opgave 1. *(8 punten)*
Zij R een commutatieve ring. Voor een ideaal I van R definiëren we de verzameling $\sqrt{I}$ door

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ voor een } n \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

(i) Toon aan dat $\sqrt{I}$ een ideaal van R is en dat $I \subset \sqrt{I}$.

(ii) Bewijs dat voor idealen I, J van R geldt dat $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(iii) Laat zien dat $\sqrt{P} = P$ als P een priemideaal van R is.

Opgave 2. *(10 punten)*
Zij $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-19}] = \{a+b\sqrt{-19} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Laten $I := (2, 1+\sqrt{-19})$, $J_1 := (5, 1+\sqrt{-19})$ en $J_2 := (5, 1-\sqrt{-19})$ idealen zijn in R.

(i) Ga na welke van de idealen $I^2 = I \cdot I$ en $J_1 \cdot J_2$ hoofdidealen zijn.

(ii) Bewijs dat R geen ontbindingsring is.

(iii) Licht toe dat R/J_1 een lichaam is.

(iv) Welke van de restklassenringen $R/(2)$, $R/(3)$ en $R/(5)$ hebben nuldelers, welke zijn integriteitsgebieden en welke zijn lichamen?

Opgave 3. *(6 punten)*
Zij $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \neq 0$, $a \neq b$ en definieer $c := \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(i) Laat zien dat $\mathbb{Q}(c) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

(ii) Wat zijn de mogelijke graden van de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \supset \mathbb{Q}$? Geef voor ieder van deze mogelijkheden een voorbeeld.

z.o.z. voor Opgaven 4 en 5

Opgave 4. *(10 punten)*
Zij $a := \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ en $b := \sqrt[6]{2} \in \mathbb{R}$.

(i) Bereken de minimumveeltermen van $a + 1$ en a^{-1} over $\mathbb{Q}$.

(ii) Bepaal de graden van de lichaamsuitbreidingen $\mathbb{Q}(a) \supset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(b) \supset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(a, b) \supset \mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}(a) \cap \mathbb{Q}(b) \supset \mathbb{Q}$.

(iii) Bereken de minimumveelterm van b over $\mathbb{Q}(a)$.

(iv) Zij t transcendent over $\mathbb{Q}$. Bewijs dat dan ook ta en $t + a$ transcendent zijn over $\mathbb{Q}$.

Opgave 5. *(8 punten)*
Zij $\mathbb{F}_q$ het eindige lichaam met q elementen, zij $\mathbb{F}_{q^2}$ de lichaamsuitbreiding van graad 2 van $\mathbb{F}_q$ en zij $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(i) Toon aan: De vergelijking $x^n = b$ heeft voor iedere $b \in \mathbb{F}_q$ een oplossing in $\mathbb{F}_q$ dan en slechts dan als $\mathrm{ggd}(n, q - 1) = 1$. Laat ook zien dat in dit geval de oplossing eenduidig is.

(ii) Zij $\mathrm{ggd}(n, q - 1) > 1$ en $0 \neq b \in \mathbb{F}_q$.

Bewijs dat het aantal elementen $a \in \mathbb{F}_q$ waarvoor $a^n = b^n$ geldt, gelijk is aan $\mathrm{ggd}(n, q - 1)$.

(iii) Stel dat q oneven is. Er zijn drie typen van elementen in $\mathbb{F}_{q^2}$:

(a) elementen a met $a \in \mathbb{F}_q$;
(b) elementen b met $b \notin \mathbb{F}_q$ maar $b^2 \in \mathbb{F}_q$;
(c) elementen c met $c \notin \mathbb{F}_q$ en $c^2 \notin \mathbb{F}_q$.

Bepaal het aantal elementen van type (a), (b) en (c) in $\mathbb{F}_{q^2}$.

Succes ermee!