Operations Research (WB094) **27 oktober 2020**

Tentamen Operations Research (kans A)

Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student. Zo nodig zal de zaak worden doorverwezen naar de examencommissie.

Upload aan het begin van het tentamen de verklaring dat je alleen de toegelaten hulpmiddelen gaat gebruiken.

Vergeet niet je uitwerkingen vóór het uploaden met je naam te voorzien en duidelijk te nummeren zo dat het ingeleverde werk in een zinvolle volgorde gebracht kan worden.

Opgave 1. *(8 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

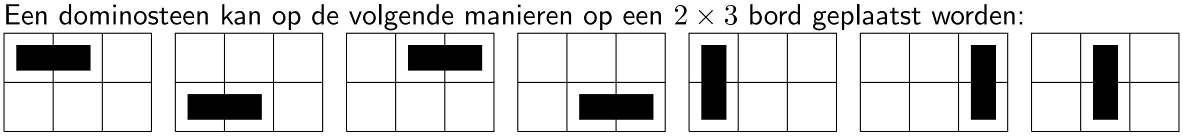
$$\text{maximaliseer } (-4x_1 - 2x_2 - 3x_3) \text{ voor } \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 2 \end{array} \text{ met } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(i) Bepaal middels het Simplex algoritme een optimale oplossing van dit LP-probleem.

(ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

(iii) Zijn de oplossingen van het originele LP-probleem en van het duale probleem eenduidig? Licht je antwoord toe.

Opgave 2. *(7 punten)*
Een dominosteen kan op de volgende manieren op een 2×3 bord geplaatst worden:



De eerste speler plaatst (verborgen voor de tweede speler) een dominosteen op het bord, de tweede speler kiest één van de zes velden van het bord.
Als het gekozen veld van de dominosteen overdekt wordt, wint de tweede speler het spel, als niet wint de eerste speler.

(i) Geef de volledige 7×6-matrix aan die dit spel als twee-personen matrixspel beschrijft.

(ii) Uit symmetrieredenen zijn er voor de eerste speler slechts drie essentieel verschillende manieren de dominosteen te plaatsen, en zijn er voor de tweede speler slechts twee essentieel verschillende manieren een veld te kiezen.

Laat zien dat zich de matrix van het spel op basis van deze symmetrieredenen laat reduceren naar de 3×2-matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Bepaal voor beide spelers *alle* optimale strategieën voor het spel m.b.t. de gereduceerde matrix uit deel (ii).

Wat is de waarde van het spel?

z.o.z. voor Opgave 3

Opgave 3. *(6 punten)*
Voor de primale en duale problemen

(P) $\min c^{tr}x$ voor $x \geq 0$ met $Ax \geq b$ en (D) $\max b^{tr}y$ voor $y \geq 0$ met $A^{tr}y \leq c$

is het bijhorende homogene Goldman-Tucker systeem gegeven door

$$\text{(H)} \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^{tr} & 0 & c \\ b^{tr} & -c^{tr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ \kappa \end{pmatrix} \geq 0 \text{ voor } x, y, \kappa \geq 0.$$

Zij verder $\rho := \rho(x, y) = b^{tr}y - c^{tr}x$ de slack variabele van de laatste ongelijkheid in (H).

Bewijs dat (H) geen oplossing heeft met $\kappa > 0$ en $\rho > 0$ en dat precies één van de volgende twee alternatieven geldt:

(1) Er is een oplossing van (H) met $\kappa > 0$ en $\rho = 0$.
In dit geval zijn $\frac{1}{\kappa}x$ en $\frac{1}{\kappa}y$ optimale oplossingen van (P) en (D).

(2) Er is een oplossing van (H) met $\rho > 0$ en $\kappa = 0$.
In dit geval is (P) ontoelaatbaar of (D) ontoelaatbaar.

Hint: Gebruik (een geschikte versie van) het Farkas lemma om te laten zien dat er in het geval $\kappa = 0$ een oplossing is met $\rho > 0$.

Succes ermee!