Tentamen Inleiding Meetkunde
10 januari 2020, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Veel succes!

Opgave 1. (2 + 3 + 3 punten)

(a) Welke van de volgende punten van $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ representeren de lijn in $\mathbb{R}^3$ door O en $(-1, 2, 1)$?

$$[1 : -2 : -1], \qquad [-2 : 4 : 1], \qquad [-\frac{1}{2} : 1 : \frac{1}{2}], \qquad [-1 : 2 : 0]$$

(b) Zij ℓ_1 de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door $[-1 : 2 : 1]$ en $[0 : 2 : 0]$ en zij ℓ_2 de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door $[1 : 0 : 0]$ en $[1 : 2 : 3]$. Bepaal het snijpunt $\ell_1 \cap \ell_2$.

(c) Laat zien dat de vier punten uit onderdeel (b) een vierhoek in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ vormen.

Opgave 2. (2 + 1 + 2 punten)

In $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ hebben we de punten

$$P_1 = [1 : 1], \quad P_2 = [1 : -1], \quad P_3 = [2 : 1], \quad P_4 = [1 : 2], \quad P_5 = [3 : 1], \quad P_6 = [1 : 3].$$

Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $ad - bc \neq 0$. Bekijk de projectieve transformatie $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ gegeven door

$$f([x : y]) = [ax + by : cx + dy].$$

(a) Stel dat $f(P_1) = P_1$ en $f(P_2) = P_2$. Laat zien dat er $a, b \in \mathbb{R}$ zijn zodat

$$f([x : y]) = [ax + by : bx + ay].$$

(b) Bepaal de dubbelverhoudingen $[P_1, P_2; P_3, P_4]$ en $[P_1, P_2; P_5, P_6]$.

Ter herinnering, de dubbelverhouding van vier reële getallen x_i is

$$[x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}.$$

(c) Laat zien dat er een projectieve transformatie $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ bestaat, zodat $f(P_1) = P_1, f(P_2) = P_2, f(P_3) = P_5$ en $f(P_4) = P_6$.

z.o.z.

Opgave 3. (2 + 1 + 3 punten)

(a) Welke van de volgende vergelijkingen definiëren een lijn in het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$?

$$\begin{aligned}
&2(z-\bar{z})+3=0\\
&z\bar{z}+2=0\\
&z\bar{z}+5(z+\bar{z})+2=0\\
&z\bar{z}+5(z+\bar{z})+24=0
\end{aligned}$$

(b) Zij $\mathcal{C}$ de halfcirkel in $\mathbb{H}$ met middelpunt -1 en straal 2. Zij $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ de cirkelspiegeling ten opzichte van $\mathcal{C}$. Bepaal $f(i)$.

(c) Schrijf de afbeelding f uit onderdeel (b) als samenstelling van Möbiustransformaties van de volgende types:

$$\begin{aligned}
&z\mapsto az+b \quad (a,b\in\mathbb{R}, a>0),\\
&z\mapsto a\bar{z}+b \quad (a,b\in\mathbb{R}, a<0),\\
&z\mapsto 1/\bar{z}.
\end{aligned}$$