Tentamen Manifolds (WB079C) – 22 januari 2020

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van alle resultaten bewezen in het boek, tenzij expliciet gevraagd. Het tentamen bestaat uit vier opgaven op twee pagina's. Succes!

1. **Raakruimtes**

   Stel M is een gladde variëteit.

   (a) Geef een definitie van de raakruimte T_pM voor $p \in M$. Wat is de dimensie van T_pM als reële vectorruimte?

   (b) Stel M, N and K zijn gladde variëteiten en laat

   $$M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} K$$

   gladde afbeeldingen ertussen zijn. Definieer de *differentiaal van F* in $p \in M$; deze wordt genoteerd door dF_p. Laat zien dat de volgende gelijkheid geldt:

   $$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

   als afbeeldingen $T_p(M) \to T_{G(F(p))}(K)$. (je hoeft niet te laten zien dat deze functies lineair zijn).

   (c) Stel $p \in M$ is een punt en laat (U, φ) een gladde kaart zijn voor M rond p. Leg uit hoe φ een isomorfisme bepaalt van

   $$T_p(M) \xrightarrow{\rho_\varphi} \mathbb{R}^m$$

   (als vectorruimtes), waar m de dimensie is van M.

   (d) In dezelfde notatie als hierboven, laat (V, ψ) een kaart zijn rond $F(p) \in N$. Bewijs dat het diagram

   $$\begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(p)}(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_\psi} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

   commuterend is, met n de dimensie van N, ρ_ψ het isomorfisme bepaalt door de kaart (V, ψ) zoals in (c), en de onderste afbeelding is vermenigvuldiging met de Jacobiaan $D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

... het tentamen gaat verder op de volgende pagina!!

2. **Projectieve ruimte**

   Bewijs dat de volgende afbeelding een welgedefinieerde gladde inbedding is van de twee-dimensionale reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in de vectorruimte $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ van 3×3-symmetrische matrices:

$$\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}),$$

$$[x^0 : x^1 : x^2] \mapsto \frac{xx^t}{x \cdot x} = \frac{1}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2} \begin{pmatrix} x^0x^0 & x^0x^1 & x^0x^2 \\ x^1x^0 & x^1x^1 & x^1x^2 \\ x^2x^0 & x^2x^1 & x^2x^2 \end{pmatrix}$$

3. **Immersies, submersies en inbeddingen**

   Stel M en N zijn gladde variëteiten en $M \xrightarrow{F} N$ een gladde afbeelding.

   (a) Wat betekent het voor F om een submersie te zijn? Wat betekent het voor F om een immersie te zijn?

   (b) Stel dat F injectief is. Geef een criterium dat garandeert dat F een immersie is.

   (c) Wanneer is F een inbedding?

   (d) Geef een voorbeeld waarin F een injectieve immersie is, maar geen inbedding.

4. **Volumevorm op de sfeer**

   Definieer een 2-vorm ω op $\mathbb{R}^3$ door

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

   (a) Druk ω uit in bolcoördinaten (ρ, φ, θ), gedefinieerd door

$$(x, y, z) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi).$$

   (b) Bereken $d\omega$ in zowel cartesische als bolcoördinaten en verifieer dat beide uitdrukkingen dezelfde 3-vorm voorstellen.

   (c) Bereken de pullback $\imath_{\mathbb{S}^2}^* \omega$ naar $\mathbb{S}^2$, daarbij gebruikmakend van de coördianten (φ, θ) op een open verzameling waar deze coördinaten gedefinieerd zijn.

   (d) Laat zien dat $\imath_{\mathbb{S}^2}^* \omega$ nergens nul is.