Tentamen Differentieerbare Variëteiten (WB079C) – 20-1-2022

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van alle resultaten bewezen in het boek, tenzij expliciet gevraagd. Het tentamen bestaat uit vier opgaven op twee pagina's. Succes!

1. **De 2-sfeer** (40pt)

   Bekijk op de 2-dimensionale sfeer $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ de stereografische atlas gegeven door
   $$\mathcal{A} = \{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$$
   waarin $U_\pm = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$ en de coördinaten geïnduceerd door $\phi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2$ zijn
   $$x_+ = \frac{x}{1-z}; \qquad y_+ = \frac{y}{1-z}$$
   $$x_- = \frac{x}{1+z}; \qquad y_- = \frac{y}{1+z}$$

   (a) Laat zien dat z op U^+ en op U^- als volgt kan worden uitgedrukt in de respectievelijke coördinaten (x_+, y_+) en (x_-, y_-):
   $$z = \frac{-1 + x_+^2 + y_+^2}{1 + x_+^2 + y_+^2} \quad (\text{op } U_+); \qquad z = \frac{1 - x_-^2 - y_-^2}{1 + x_-^2 + y_-^2} \quad (\text{op } U_-).$$

   (b) Laat hiermee zien dat we x en y op U^+ kunnen schrijven als de volgende functies van x_+ en y_+:
   $$x = \frac{2x_+}{1 + x_+^2 + y_+^2}; \qquad y = \frac{2y_+}{1 + x_+^2 + y_+^2},$$
   Net zo geldt op U^- dat (maar dit hoef je niet nog een keer te bewijzen!)
   $$x = \frac{2x_-}{1 + x_-^2 + y_-^2}; \qquad y = \frac{2y_-}{1 + x_-^2 + y_-^2}.$$

   (c) Verifieer dat de transitiefunctie van (U_-, ϕ_-) naar (U_+, ϕ_+) een diffeomorfisme is.

   (d) Laat zien dat er een *glad* vectorveld X op $\mathbb{S}^2$ bestaat die in de coördinaten (x_+, y_+) is gegeven door
   $$X|_{U_+} = x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} + y_+ \frac{\partial}{\partial y_+} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2),$$
   en schrijf de uitdrukking voor X in de coördinaten (x_-, y_-).

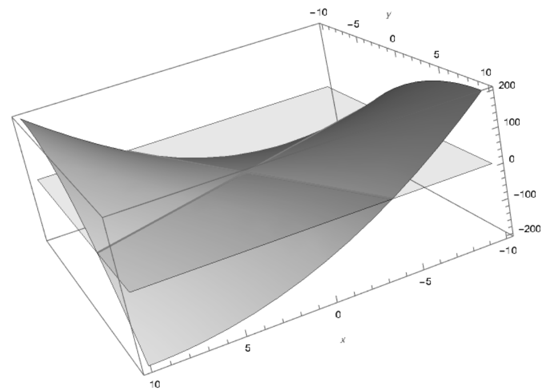
   (e) Bepaal de stroming van X in beide kaarten en geef een schets van die stroming op $\mathbb{S}^2$.

   (f) Is het vectorveld X volledig?

   ... het tentamen gaat verder op de volgende pagina!!

2. **Reguliere waarden** (20pt)

   Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door
$$f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$$
   Om een idee te krijgen staat hieronder een plot van de functie f:



   met daarbij ook de doorsnede met het xy-vlak aangegeven.

   (a) Specificeer de deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ waarop de rang van df gelijk is aan respectievelijk 0 en 1.

   (b) Geef alle waarden $c \in \mathbb{R}$ zodat $f^{-1}(c)$ een ingebedde deelvariëteit is en bewijs je bewering.

3. **Gladde vectorvelden** (10pt)

   Stel M is een gladde variëteit. Laat $f, g \in C^\infty(M)$ en laat X en Y gladde vectorvelden zijn op M.

   (a) Definieer het *Lie haakje* $[X, Y]$ en laat zien dat
$$[fX, gY] = (fXg)Y - (gYf)X + fg[X, Y].$$

   (b) Geef een definitie van de Lie afgeleide $\mathcal{L}_X Y$ in termen van hun Lie haakje en bewijs dat
$$\mathcal{L}_V(gW) = (Vg)W + g\mathcal{L}_V W.$$

4. **Differentiaalvormen** (20pt)

   Stel M is een gladde variëteit. Laat $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$ en laat X en Y gladde vectorvelden zijn op M.

   (a) Bewijs dat $df(X) = X(f)$.

   (b) Bewijs de formule
$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

   (c) Combineer (a) en (b) om te bewijzen dat $d^2 f = 0$.

——————————||——————————

Puntenverdeling (totaal 90pt + 10pt gratis):

1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c
5	5	5	10	10	5	10	10	5	5	5	10	5