Tentamen Maattheorie (WB088) – 16 januari 2020

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van alle resultaten bewezen in het boek, tenzij expliciet gevraagd. Het tentamen bestaat uit vijf opgaven op twee pagina's. Succes!

1. **Maten**

   Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte.

   (a) Stel $\{\mu_n\}$ is een rij maten op $(X, \mathcal{A})$ die stijgend is in de zin dat $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

   $$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

   een maat op $(X, \mathcal{A})$ definieert.

   (b) Zij $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een willekeurige rij maten op $(X, \mathcal{A})$. Bewijs dat $\mu(A) = \sum_n \mu_n(A)$ een maat op $(X, \mathcal{A})$ definieert.

2. **Maten met teken**

   Stel dat μ_1, μ_2 eindige maten met teken zijn op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Definieer

   $$\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+.$$

   (a) Bewijs dat $\mu_1 \vee \mu_2$ een eindige maat met teken is.

   (b) Laat zien dat $(\mu_1 \vee \mu_2)(A) \geq \mu_1(A)$ en $(\mu_1 \vee \mu_2)(A) \geq \mu_2(A)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$.

   (c) Bewijs: als ν eindig maat met teken op $(X, \mathcal{A})$ is zodat $\nu(A) \geq \mu_1(A)$ en $\nu(A) \geq \mu_2(A)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$, dan geldt $\nu \geq \mu_1 \vee \mu_2$.

3. **Integreerbare functies**

   Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $f : X \to [0, +\infty]$ een meetbare functie.

   (a) Onder de extra aanname dat $f(X) \subseteq \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, bewijs dat

   $$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(f^{-1}(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq n\}).$$

   (b) Stel nu dat μ eindig is en $f : X \to [0, +\infty]$ meetbaar. Bewijs dat integreerbaarheid van f equivalent is aan convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq n\})$.

... het tentamen gaat verder op de volgende pagina!!

4. **Convergentiestellingen**

   Bewijs met behulp van de Monotone Convergentiestelling het Lemma van Fatou (Theorem 2.4.4 in het boek van Cohn):

   > **Stelling**. *Stel* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *is een maatruimte en laat* $(f_n)_n$ *een rijtje van* $[0, \infty]$-*waardige* $\mathcal{A}$-*meetbare functie op* X *zijn. Dan geldt*
   >
   > $$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$$

5. **Radon–Nikodym**

   Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eindige maatruimte en $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ een deel-σ-algebra.

   (a) Construeer een functie $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ (dus meetbaar t.o.v. $\mathcal{B}$!) waarvoor geldt $\int_B g d\mu = \int_B f d\mu$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.

   (b) Laat zien dat g uniek is op verandering op een verzameling van maat nul na en dat $[g] \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ alleen van $[f] \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ afhangt.

   (c) Laat zien dat de door (a),(b) gedefinieerde afbeelding $L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}) \to L^1(X, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$ lineair is.