Tentamen Galoistheorie
17 januari 2022, 8:30–11:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Dit is een open boek tentamen, je mag de literatuur van het college gebruiken.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Je mag bij een opgave de resultaten van eerdere deelopgaven gebruiken, ook als je die niet kon bewijzen.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Veel succes!

Opgave 1. (1 + 2 + 2 punten)
Zij $K = \mathbb{F}_5(T), g = X^3 - T \in K[X]$, en zij L een splijtlichaam van g over K.

(a) Laat zien dat L/K een Galoisuitbreiding is.

(b) Bepaal de Galoisgroep van L/K.

(c) Vind alle deellichamen van L/K.

Opgave 2. (2 + 2 + 1 punten)
Definieer de reële getallen $\alpha = 3 - \sqrt[5]{6}$ en $\theta = \sqrt[9]{\alpha}$.

(a) Bepaal de minimumpolynomen $f_{\mathbb{Q}}^{\alpha}$ en $f_{\mathbb{Q}}^{\theta}$.

(b) Bepaal alle nulpunten van $f_{\mathbb{Q}}^{\theta}$.

(c) Toon aan dat $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_{\mathbb{Q}}^{\theta})$ een oplosbare groep is.

Opgave 3. (4 punten)
Zij L/K een oneindige Galoisuitbreiding en zij $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ een ondergroep van eindige index. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(i) H is open,

(ii) H is gesloten,

(iii) $[L^H : K] = [\mathrm{Gal}(L/K) : H]$.

z.o.z.

Opgave 4. (2 + 2 punten)

(a) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\zeta_{11})/\mathbb{Q}$ precies twee tussenlichamen $\mathbb{Q} \subsetneq L_i \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta_{11})$ heeft.

(b) Een van deze lichamen, zeg L_2, is een kwadratische uitbreiding van $\mathbb{Q}$. Bepaal een polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ zodat L_2 een splijtlichaam van f over $\mathbb{Q}$ is.

Opgave 5. (2 + 2 + 2 + 2 punten)
Zij $f = X^4 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ en zij $\bar{f} \in \mathbb{F}_p[X]$ de reductie modulo p van f.

(a) Voor welke priemgetallen p heeft $\bar{f}$ een meervoudig nulpunt in $\overline{\mathbb{F}_p}$?
Hint: bereken $\mathrm{ggd}(\bar{f}, \bar{f}')$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

(b) Beschrijf de Galoisgroep $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_3}(\bar{f})$ als ondergroep van S_4.

(c) Beschrijf de Galoisgroep $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_5}(\bar{f})$ als ondergroep van S_4.

(d) Bewijs dat $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_4$.