# Tentamen Galoistheorie
# 20 januari 2020, 8:30–11:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Dit is een open boek tentamen, je mag de literatuur van het college gebruiken.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Je mag bij een opgave de resultaten van eerdere deelopgaven gebruiken, ook als je die niet kon bewijzen.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Veel succes!

**Opgave 1.** (1 + 3 punten)

a. Laat zien dat $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}) \cong C_4 \times C_2$. Hier is $C_n$ de cyclische groep met $n$ elementen.

b. Bepaal alle tussenlichamen van de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}$, en geef aan met welke ondergroepen van de Galoisgroep ze corresponderen.

**Opgave 2.** (2 punten)
Zij $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Laat zien dat $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is en bepaal de Galoisgroep.

**Opgave 3.** (2 punten)
Zij $L/K$ een eindige Galoisuitbreiding en zij $M$ een tussenlichaam van $L/K$. Zij $N$ de normale afsluiting van $M$ in $L$. Laat zien dat

$$\mathrm{Gal}(L/N) = \bigcap_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma \mathrm{Gal}(L/M) \sigma^{-1}.$$

**Opgave 4.** (2 + 3 + 2 punten)

a. Zij $K$ een lichaam en $K(\alpha)/K$ een enkelvoudige Galoisuitbreiding.
Bewijs dat het minimumpolynoom van $\alpha$ over $K$ gegeven wordt door

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)} (X - \sigma(\alpha)) = f_K^\alpha.$$

b. Zij $L/K$ een eindige Galoisuitbreiding en zij $\beta \in L$. Laat zien dat

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} (X - \sigma(\beta)) = (f_K^\beta)^{[L:K(\beta)]}.$$

c. Zij $E/K$ een eindige normale uitbreiding en zij $\gamma \in E$. Toon aan dat

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(E/K)} (X - \sigma(\gamma))^{[K(\gamma):K]} = (f_K^{\gamma})^{|\mathrm{Aut}(E/K)|}.$$

**Opgave 5.** (2 + 2 + 1 + 2 punten)
Zij $p$ een priemgetal en $G \subset S_p$ een ondergroep die transitief werkt op $\{1, 2, \ldots, p\}$.

a. Toon aan dat $G$ een ondergroep $C$ van orde $p$ bevat.

b. Stel dat $C$ normaal in $G$ is. Bewijs dat $G/C$ is isomorf met een ondergroep van de automorfismengroep van $C$.

c. Neem nu aan dat $|G| \leq p(p-1)$. Uit de theorie van Sylow-ondergroepen is bekend dat $C$ dan de enige ondergroep van $G$ van orde $p$ is.
Laat zien dat $G/C$ een abelse groep is.

d. Zij $K$ een lichaam van karakteristiek 0 en zij $f \in K[X]$ een irreducibel polynoom van graad $p$, dat splijt over een lichaam $L \supset K$ met $[L : K] < p^2$.
Bewijs dat $f$ oplosbaar is over $K$.

**Opgave 6.** (2 + 2 + 3 punten)
Schrijf $\sqrt{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in \mathbb{Q}\}$ en $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbb{Q}})$.

a. Laat zien dat $L/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is.

b. Zij $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \sqrt{\mathbb{Q}}$ zodat $z_j \notin \mathbb{Q}(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1})$ voor $1 \leq j \leq k$. Bewijs dat

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z_1, z_2, \ldots, z_k)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k.$$

c. Bewijs dat $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.