Tentamen Combinatorische Groepentheorie (kans A)

Opgave 1. *(8 punten)*
Zij $F = F(x, y)$ de vrije groep van rang 2.

(i) Laat zien dat ook $S' = \{x, xy\}$ en $S'' = \{x, x^2y\}$ bases zijn voor F.

(ii) Leg uit dat F oneindig veel verschillende bases heeft.

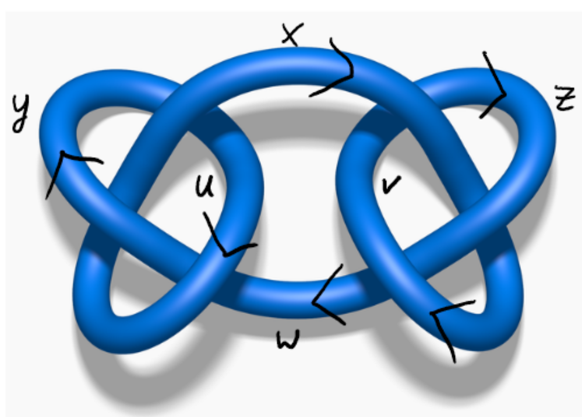
(iii) Geef een automorfisme α van F aan dat eindige orde heeft en een automorfisme β van F dat oneindige orde heeft.

Opgave 2. *(10 punten)*
Zij G de groep met presentatie $G = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1}\rangle$.

(i) Geef een deel aan van de Cayley graaf van G (met betrekking tot $S = \{a, b\}$) met minstens alle knopen die afstand 1 of 2 hebben van het eenheidselement.

(ii) Bewijs dat G geen elementen van eindige orde bevat (behalve het eenheidselement).

Opgave 3. *(10 punten)*
De hieronder afgebeelde knoop ontstaat door twee klaverbladknopen te koppelen.



(i) Bepaal de Wirtinger presentatie van de knoopgroep $G(\mathcal{K}) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K})$ van deze knoop.

NB: Gebruik bij voorkeur de in de afbeelding aangegeven labels voor de strengen, anders wordt het nakijken erg lastig.

(ii) Ga na dat $x = w$ geldt voor de voortbrengers van de betreffende strengen.

Leid hiermee af dat zich de Wirtinger presentatie laat vereenvoudigen tot de presentatie $\langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz\rangle$.

z.o.z. voor Opgaven 4 en 5

Opgave 4. *(10 punten)*
Zij $F = F(x, y)$ de vrije groep van rang 2.

(i) Laat zien dat F voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een normaaldeler H van index n heeft met $F/H \cong \mathbb{Z}_n$.

(ii) Geef een Schreier transversaal T aan voor H in F en bepaal de corresponderende Schreier voortbrengers voor H.

Opgave 5. *(6 punten)*
Laten G en H twee niet-triviale groepen zijn en zij $G * H$ hun vrij product.
Bewijs dat het centrum $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ voor alle } w \in G * H\}$ van $G * H$ triviaal is.

Succes ermee!