Discrete Wiskunde (WB011) **26 Oktober 2020**

Tentamen

Geef bij elke opgave een bewijs en/of berekening. Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek is toegestaan. Dit tentamen duurt twee uur.

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. In totaal zijn er 29 punten te verdienen.

Succes!

Opgave 1 (6 punten)**.** Een vast punt van een permutatie σ van $[n]$ is een $j \in [n]$ zodat $\sigma(j) = j$. Hoeveel permutaties van $[7]$ zijn er waarbij geen enkele $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ een vast punt is? Reken het antwoord helemaal uit (dus geef naast de berekening uiteindelijk ook een getal).

Opgave 2 (1 + 2 + 2 punten)**.** Bij alle onderdelen van deze opgave geldt dat je het aantal niet helemaal hoeft uit te rekenen: een uitdrukking met behulp van de bekende getallenfamilies en/of binomiaalcoëfficiënten is voldoende.
We verdelen 10 personen over een aantal niet lege groepen (de groepen zijn niet geordend).

(a) Op hoeveel manieren kan dit?

(b) Op hoeveel manieren kan dit in twee groepen van 5 personen?

(c) Op hoeveel manieren kan dit als er minstens één groep is die 5 personen bevat?

Opgave 3 (6 punten)**.** We beschouwen in deze opgave partities van het getal n. Het Durfeevierkant van zo'n partitie is het grootste vierkant dat in het Ferrersdiagram van die partitie past. Dit Durfeevierkant is dus een d bij d vierkant als d maximaal is met de eigenschap dat er minstens d delen zijn die minstens d groot zijn.
Een partitie heet zelfgeconjugeerd als de gespiegelde (in de diagonaal) van het Ferrersdiagram weer hetzelfde Ferrersdiagram geeft.
Bewijs dat er $P(\frac{n-d^2}{2} + d, d)$ zelfgeconjugeerde partities zijn van het getal n waarvan het Durfeevierkant van grootte d bij d is.

Opgave 4 (4 punten)**.** Gegeven een verzameling X en een partiële ordening $(Y, \leq)$. Zij f een functie van type $X \to Y$. Definieer de relatie $\preceq$ op X door $x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Toon aan dat $(X, \preceq)$ een partiële ordening is dan en slechts dan als f injectief is.

Opgave 5 (1 + 1 + 3 + 3 punten)**.** Een functie $f\colon [n] \to [n]$ heet idempotent als $f(f(k)) = f(k)$ voor alle $k \in [n]$. Zij a_n het aantal idempotente functies van type $[n] \to [n]$. We spreken af dat $a_0 = 1$.

(a) Laat met behulp van volledige enumeratie zien dat $a_3 = 10$.

(b) Laat zien dat (dit lijkt los te staan van de opgave, maar we hebben het nodig in onderdeel (c)):

$$(1+x)e^x = \sum_{j \geq 0} (j+1) \frac{x^j}{j!}.$$

(c) Neem voor dit onderdeel aan (zonder dit te bewijzen, maar zie onderdeel (d)) dat de volgende recursieve formule geldt:

$$n \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} a_{n-k}.$$

Zij $F(x)$ de exponentiële voortbrengende functie (EGF) van de rij $(a_n)_{n \geq 0}$. Laat zien dat:

$$F'(x) = (x+1)e^x F(x).$$

(d) Geef een bewijs voor de recursieve formule die je in onderdeel (c) hebt gebruikt.

Deze deelopgave kan wat meer tijd kosten. Daarom is dit het laatst gegeven onderdeel van dit tentamen.

De crux is om uit te zoeken welk gevalsonderscheid je moet gebruiken. Als je het verkeerde onderscheid maakt, dan kom je namelijk (mogelijk) uit op een andere formule.