Discrete Wiskunde (WB011) **18 Januari 2021**

Hertentamen

Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek is toegestaan. Dit tentamen duurt twee uur.

Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. In totaal zijn er 27 punten te verdienen.

Het cijfer dat je krijgt is 1 + 9 × aantal gehaalde punten / 27. Dit wordt afgerond op halve punten. Uitzondering zijn cijfers tussen de 5 en de 6: deze cijfers worden afgerond op hele punten. Kortom, je hebt een voldoende, dus een cijfer 6 of hoger, als je minstens $27/2$ *punten hebt gehaald.*

Succes!

Opgave 1 (2 + 5 punten)**.** Een vast punt van een permutatie σ van $[n]$ is een $j \in [n]$ zo dat $\sigma(j) = j$.

(a) Hoeveel permutaties van [15] zijn er met 5 cykels, waarbij 15 een vast punt is? Druk je antwoord uit in termen van de Stirling getallen van de eerste soort (je hoeft het niet verder uit te rekenen).

(b) Hoeveel permutaties van [15] zijn er met 5 cykels, waarbij 15 het enige vaste punt is? Druk je antwoord uit in termen van de Stirling getallen van de eerste soort (je hoeft het niet verder uit te rekenen).

Opgave 2 (4 + 4 punten)**.** We verdelen n appels over 4 kinderen en 10 volwassenen. Kinderen krijgen minimaal 1 appel, maar maximaal 3. De volwassenen krijgen een drievoud aan appels.

(a) Laat zien dat de OGF in compacte vorm voor dit telprobleem gegeven is door

$$\frac{x^4}{(1-x)^4(1-x^3)^6}.$$

(b) Reken uit op hoeveel manieren dit kan als er $n = 12$ appels zijn.

Opgave 3 (5 punten)**.** Voor positieve gehele getallen n, p, q laat $A(n, p, q)$ het aantal manieren zijn om n identieke objecten te verdelen over hoogstens p identieke ontvangers, waarbij elke ontvanger hoogstens q objecten krijgt. Dan geldt er een recursie van de vorm

$$A(n, p, q) = A(n, p - 1, q) + A(x, y, z),$$

voor zekere positieve gehele getallen x, y, z. Bepaal uitdrukkingen voor x, y, z in termen van n, p, q zodat deze recursie geldt. Geef ook een sluitend bewijs dat de uitdrukking die jij gevonden hebt correct zijn.

Opgave 4 (3 + 4 punten)**.** Zij $X = \{A \mid A \subseteq [7], |A| \in \{0, 3, 5, 7\}\}$. In woorden: X bevat de deelverzamelingen (gewone deelverzamelingen, dus niet multiset deelverzamelingen) van [7] die ofwel 0, ofwel 3, ofwel 5, ofwel 7 elementen bevatten. Zij $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$ de partiële ordening van X met inclusie als relatie.

(a) Geef een antikettingpartitie (antichain cover) van X van minimale grootte. Bewijs dat er geen kleinere antikettingpartitie is.

(b) Zij μ de Möbiusfunctie van $\mathbf{P}$. Bereken $\mu(\emptyset, [7])$.