Discrete Wiskunde (WB011C) **17 januari 2018**

Tentamen

Geef bij elke opgave een bewijs en/of berekening. Je mag daarbij verwijzen naar resultaten uit het boek of naar het formuleblad. Gebruik van een niet grafische rekenmachine is toegestaan. Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Gegeven zijn 4 rode, 4 groene en 4 blauwe bekers. We bekijken verschillende rijtjes van deze 12 bekers, waarbij een verwisseling van twee bekers van dezelfde kleur geen nieuwe rij oplevert.

(a) Op hoeveel manieren kunnen deze 12 bekers in een rijtje worden gezet?

(b) Op hoeveel manieren kunnen deze 12 bekers in een rijtje worden gezet zodanig dat er geen vier bekers van dezelfde kleur naast elkaar staan?

Opgave 2 (7 punten). Voor positieve gehele getallen n zijn de Fubini getallen $a(n)$ gedefinieerd als het aantal geordende partities van $[n]$. Met een een geordende partitie wordt hier bedoeld dat de partitie een *lijst* van blokken is, waarbij de volgorde van de blokken dus wel uitmaakt (anders dan bij gewone partities die een *verzameling* van blokken zijn), maar de volgorde van de elementen in de blokken niet. Verder wordt afgesproken dat $a(0) = 1$.

(a) Schrijf alle $a(3) = 13$ geordende partities van $[3]$ uit.

(b) Bewijs voor $n \geq 1$ dat $a(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a(n-k)$.

(c) Bewijs voor $n \geq 1$ dat $2a(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a(j)$.

(d) Definieer de EGF $f(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)\frac{x^n}{n!}$. Bewijs dat $f(x) = \frac{1}{2-e^x}$. Let op dat de recursie van (c) alleen geldt voor $n \geq 1$.

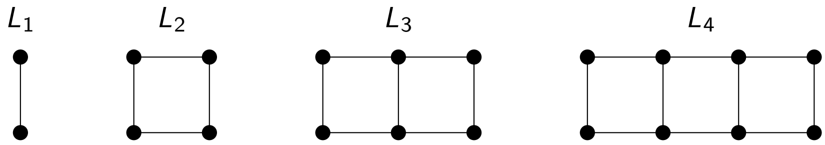
Opgave 3 (5 punten). We bekijken het aantal kleuringen van de 8 wieken van de speelgoed windmolen in de afbeelding. Kleuringen zijn equivalent als ze door draaiing (cyclische symmetrie van orde 8) in elkaar overgevoerd kunnen worden. Verder kijken we alleen naar de kleuren op de voorkant (anders dan op het plaatje).

(a) Hoeveel kleuringen zijn er te maken met 4 verschillende kleuren?

(b) Hoeveel verschillende kleuringen zijn er te maken met 4 verschillende kleuren, waarbij elke kleur twee keer voorkomt?

Zie achterzijde voor opgave 4 en 5.

Opgave 4 (4 punten)**.** Voor $n \geq 1$ definiëren we de laddergraaf L_n als een rooster van hoogte 2 en breedte n. Zie een aantal voorbeelden hieronder.



(a) Zij $p(L_n, k)$ de chromatische veelterm van L_n. Bepaal een veelterm $f(k)$ zo dat de volgende recursie geldt: $p(L_{n+1}, k) = f(k)p(L_n, k)$.

(b) Leidt een directe formule af voor $p(L_n, k)$.

Opgave 5 (5 punten)**.** Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening. Met $x < y$ noteren we dat $x \leq y$ en $x \neq y$.

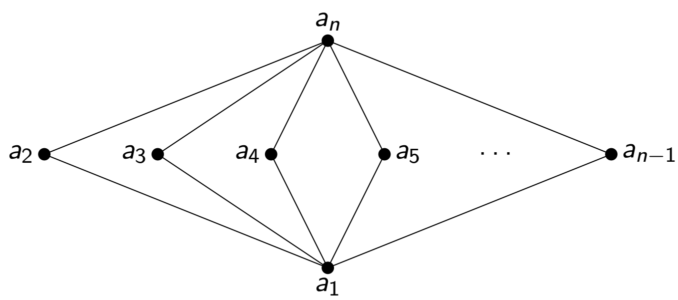
(a) Laat zien dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt:

$$\mu(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij c_i het aantal ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = y$ van lengte i tussen x en y is.

(b) Zij X de verzameling van lineaire deelruimten van $\mathbb{F}_p^2$ en $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$ de partiële ordening op X met inclusie als relatie.

Geef het aantal elementen van X aan en laat zien dat $\mathbf{P}$ het volgende Hasse diagram heeft:



(c) Bepaal de waarden $\mu(a_i, a_j)$ van de Möbius functie van de partiële ordening uit deel (b).