Tentamen Lineaire Algebra A (gelegenheid 1)

Opgave 1. *(7 punten)*

(i) Voor $k \in \mathbb{R}$ is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen gegeven:

$$\begin{aligned} kx + k^2 y &= k+4 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

(a) Geef alle k waarvoor het stelsel een eenduidige oplossing heeft. Licht je antwoord toe!

(b) Vind alle k waarvoor het stelsel meer dan één oplossing heeft.
Geef in deze gevallen de volledige oplossingsverzameling aan.

(ii) Voor $c \in \mathbb{R}$ zij de matrix A_c gegeven door $A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ c & c & 2 \\ 2 & c & c \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal alle waarden van c waarvoor A_c niet inverteerbaar is.

(b) Voor $c = 1$ is A_c wel inverteerbaar (dat kan je hopelijk uit deel (a) concluderen).
Geef de inverse matrix A_1^{-1} aan.

Opgave 2. *(7 punten)*
Zij $T : V \to W$ een lineaire afbeelding voor de $\mathbb{R}$-vectorruimten V en W. Zij verder U een lineaire deelruimte van W.

(i) Definieer de deelverzameling $X = \{v \in V \mid T(v) \in U\}$ van vectoren met beeld in U.

(a) Bewijs dat X een lineaire deelruimte is van V en dat X de kern $\mathrm{N}(T)$ van T omvat.

(b) Laat zien dat $T(X) = U \cap \mathrm{R}(T)$ (waarbij $T(X) = \{T(v) \mid v \in X\}$).

(c) Neem aan dat V en W eindigdimensionaal zijn.
Concludeer dat in dit geval geldt dat $\dim(X) = \dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(U \cap \mathrm{R}(T))$.

(ii) Zij $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ y \\ -2x + z \end{pmatrix}$ en zij $U = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Bepaal een basis van $X = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) \in U\}$.

z.o.z. voor Opgaven 3 en 4

Opgave 3. *(5 punten)*

Zij $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

(i) Bepaal een basis β van $\mathbb{R}^2$ met $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Bewijs dat er geen basis γ van $\mathbb{R}^2$ bestaat zo dat $[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 4. *(7 punten)*

Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Stel dat v een eigenvector is van A voor de eigenwaarde λ.

Laat zien dat v dan ook een eigenvector is van de matrix $B = A^7 + 3A^4 + 12A$ en dat de bijhorende eigenwaarde $\lambda^7 + 3\lambda^4 + 12\lambda$ is.

(ii) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A.

(iii) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix $B = A^7 + 3A^4 + 12A$. Licht toe waarom dit inderdaad alle eigenwaarden zijn.

Hint: Gebruik deel (i).

(iv) Bereken $A^7 v$ voor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Hint: Schrijf v als som van eigenvectoren van A.

Succes ermee!