Radboud Universiteit Nijmegen	Heyendaalseweg 135
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica	6525 AJ Nijmegen
Tentamen	**27-01-2020**
Inleiding Statistiek	**12:45-14:45**

Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken en het bijgeleverde formuleblad. Het is *niet* toegestaan een boek, aantekeningen, telefoons of apparaten met internetverbinding te gebruiken.

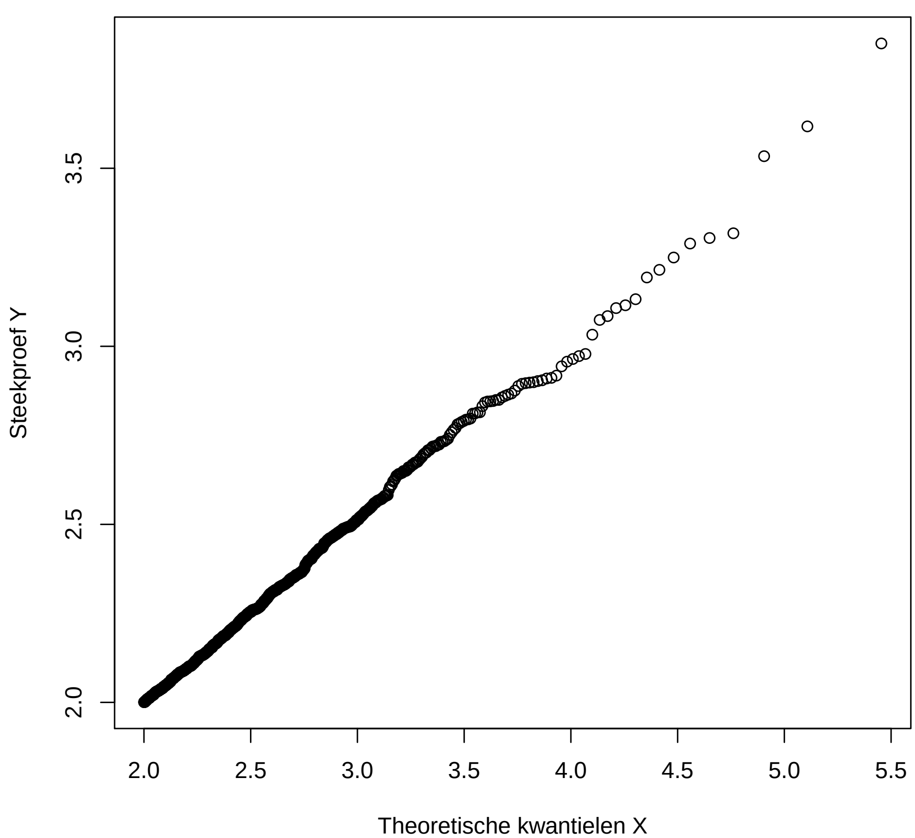
1. Zij X een stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2, \\ 2e^{-2(x-2)} & x \geq 2. \end{cases}$$

Zij verder Y een continue stochast met onbekende verdeling. In bijgaande QQ-plot is een steekproef uit de verdeling van Y uitgezet tegen de kwantielen van de verdeling van X.

(a) De punten in de QQ-plot liggen bij benadering op een rechte lijn. Welke aanname kunt u daarom maken over de verdeling van Y?

(b) Geef (onder deze aanname) een schatting voor de kansdichtheidsfunctie $f_Y(y)$ van Y.



2. Beschouw een cirkelschijf met straal 1, met in het midden een rond gat met straal $r \in [0,1)$. Op de rest van de schijf trekken we uniform n punten, en we noteren de afstanden tot het middelpunt met $R_1, \ldots, R_n$. Definiëer $M = \min\{R_1, \ldots, R_n\}$.

   (a) Laat zien dat de kansdichtheidsfunctie van M gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx(1-x^2)^{n-1}}{(1-r^2)^n} & r \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor r.

   (c) We willen toetsen of er wel echt een gat in de schijf zit. Neem

$$H_0 : r = 0, \qquad H_1 : 0 < r < 1.$$

   Als toetsingsgrootheid nemen we M en als onbetrouwbaarheidsdrempel α. Bepaal het kritieke gebied voor M.

3. Het brandstoflampje in een Sjoemelmacher 2.1 TDi gaat branden als de tank bijna leeg is. De dan resterende hoeveelheid brandstof X heeft verdeling $X \sim N(\mu, 1)$. Volgens de fabrikant geldt $\mu = 5$. Max denkt dat het lampje te laat gaat branden. Hij houdt 10 keer bij wanneer het lampje gaat branden en vindt een gemiddelde resterende hoeveelheid van 4.6 liter.

   (a) Heeft Max gelijk? Formuleer hypothesen en toets met $\alpha = 0.05$.

   (b) Stel dat in werkelijkheid geldt $\mu = 4.5$. Hoe vaak zou Max moeten meten zodat de kans dat hij zijn gelijk kan bewijzen minstens 0.9 is?

4. In een rol van 9 snoepjes kunnen drie smaken zitten: aardbei, limoen en sinaasappel. Neem aan dat snoepjes onafhankelijk van elkaar zijn en noem de kansen op aarbei en limoen respectievelijk p en q. Als gezamenlijke a priori verdeling voor deze parameters nemen we

$$\pi(p,q) = \begin{cases} 2 & \text{als } 0 \leq p \leq 1-q \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   Van de eerste drie snoepjes blijken er twee naar aardbei te smaken en één naar limoen.

   U mag gebruiken dat de Beta functie voor strikt positieve gehele n en m voldoet aan

$$B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

   (a) Bepaal de gezamenlijke a posteriori verdeling $\phi(p,q)$ van p en q.

   (b) Bepaal de Bayes schatter T voor p en schat hiermee hoeveel keer aardbei in deze rol zit. (Als (a) niet gelukt is, neem dan $\phi(p,q) = \pi(p,q)$.)

EINDE

Puntenverdeling volgens onderstaande tabel.

Opgave	1	2	3	4	Gratis	Totaal
Punten	16	24	30	20	10	100

Indien u p punten scoort en de cijfers b_1 en b_2 voor de bonusopdrachten behaald hebt, dan is uw eindcijfer

$$\min\left(\frac{2p + b_1 + b_2}{20}, 10\right).$$

Formuleblad bij Statistiek

Dit blad is niet een samenvatting of overzicht, en dient slechts als hulpmiddel.

Kansverdelingen

1. **Alternatieve of Bernoulli verdeling**: Alt(p) of Ber(p).

   $\mathrm{P}(X=1)=p$ en $\mathrm{P}(X=0)=1-p$. EX$=p$; Var$(X)=p(1-p)$.

2. **Binomiale verdeling**: Bin(n,p).

   $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ voor $k=0,1,\ldots,n$. EX$=np$; Var$(X)=np(1-p)$.

3. **Geometrische verdeling** : Geo(p).

   $\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ voor $k=1,2,\ldots$. EX$=1/p$; Var$(X)=(1-p)/p^2$.

4. **Poisson-verdeling**: Pois(μ).

   $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ voor $k=0,1,\ldots$. EX$=\mu$; Var$(X)=\mu$.

5. **Exponentiële verdeling**: Exp(λ).

   $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ en $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ voor $x\geq 0$. EX$=1/\lambda$; Var$(X)=1/\lambda^2$.

6. **Homogene of Uniforme verdeling** op $[a,b]$: hom$[a,b]$ of $U(a,b)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ en $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ voor $a\leq x\leq b$. EX$=\frac{1}{2}(a+b)$; Var$(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$.

7. **Normale verdeling**: $N(\mu,\sigma^2)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ en $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$. EX$=\mu$; Var$(X)=\sigma^2$.

8. **Gamma verdeling**: $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ $(\alpha,\lambda>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}1_{[0,\infty)}(x)$ met $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. EX$=\alpha/\lambda$; Var$(X)=\alpha/\lambda^2$.

9. **Beta verdeling**: $B_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}1_{[0,1]}(x)$ met $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.

   EX$=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$; Var$(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Covariantie en correlatie

1. Definitie covariantie: $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$.
   Eigenschappen: $\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$, $\mathrm{Cov}(rX+s,tY+u)=rt\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. Definitie correlatiecoëfficiënt: $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
3. $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Empirische verdelingsfunctie

Voor een dataset van n elementen: $F_n(x)=\dfrac{\text{aantal elementen in de dataset }\leq x}{n}$.

Centrale limietstelling

Als $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten is met alle dezelfde verdeling en met verwachting μ and variantie σ^2, dan geldt:

Centrale limietstelling:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq a\right),$$

waarbij Z een $N(0,1)$ verdeling heeft.

Locatie-schaal families

De locatie-schaal familie van dichtheden behorende bij een dichtheid f, wordt gegeven door

$$\left\{f_{a,\lambda}(\cdot) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\cdot - a}{\lambda}\right) \mid a \in \mathbb{R}, \lambda > 0\right\}.$$

Als $Z \sim f$ en $X = \lambda Z + a$, dan $X \sim f_{a,\lambda}$.

Kwantielen

Het α-onderkwantiel van een stochast X met verdelingsfunctie F wordt gedefinieerd als

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}\left(X \leq x\right) \geq \alpha\}.$$

Als $X = \lambda Z + a$, dan $F_X^{-1}(\alpha) = \lambda F_Z^{-1}(\alpha) + a$. Voor een dataset $x_1, \ldots, x_n$ schatten we het α-onderkwantiel $\hat{x}_\alpha$ door $k = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor$, $\eta = \alpha(n+1) - k$ en $\hat{x}_\alpha = (1-\eta)x_{(k)} + \eta x_{(k+1)}$.

Schatters

De onzuiverheid (bias) van een schatter T voor θ: $\quad ET - \theta$.
Als T_1 en T_2 zuivere schatters voor θ zijn, dan heet T_2 efficiënter dan T_1 als $\mathrm{Var}\,(T_2) < \mathrm{Var}\,(T_1)$.
De 'mean squared error' van een schatter T voor θ: $\quad \mathrm{MSE}(T) = E(T-\theta)^2$.
Eigenschap: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}\,(T) + (ET - \theta)^2$.

Gestandaardiseerd en gestudentiseerd steekproefgemiddelde

Als X_i een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling hebben voor $i = 1, \ldots, n$, en onafhankelijk zijn, dan hebben

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

een $N(0,1)$, respectievelijk $t(n-1)-$verdeling. Hierbij is $t(n-1)$ de t-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Verder geldt

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Twee steekproeven

Bij de twee steekproeven t-toets:

Gelijke varianties: $S_p^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right).$

Ongelijke varianties: $S_d^2 = \dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}.$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskans* $1-\Phi(a) = P(Z \geq a)$ *van de* $N(0,1)$*-variabele* Z.

$m \backslash p$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabel 2: Right critical values $t_{m,p}$ of the t-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $\mathrm{P}\left(T_m \geq t_{m,p}\right) = p$. The last row in the table are right critical values of the $N(0,1)$ distribution: $t_{\infty,p} = z_p$

m	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.8
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.2	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
100	67.3	70.0	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabel 3: Right critical values $\chi^2_p(m)$ of the χ^2-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $\mathrm{P}\left(\chi^2(m) \geq \chi^2_p(m)\right) = p$.

Volledige oplossingen:

1a Aangezien de punten bij benadering op een rechte lijn liggen, is het redelijk aan te nemen dat X en Y in dezelfde locatie-schaal-familie zitten.

1b Punten (x, y) op de lijn voldoen bij benadering aan $y = \frac{1}{2}x + 1$. Voor een punt (x, y) op de lijn geldt bovendien $\mathbb{P}(X \le x) \approx \mathbb{P}(Y \le y)$, wegens de definitie van kwantielen en de QQ-plot. Anders gezegd, $F_X(x) \approx F_Y(y)$. Nemen we nu de afgeleide naar y, dan vinden we

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) \approx \frac{d}{dy}F_X(x) = \frac{dx}{dy}\frac{d}{dx}F_X(x) \\ &= 2f_X(x) = 2f_X(2y-2) \\ &= \begin{cases} 0 & 2y-2 < 2, \\ 2 \cdot 2e^{-2((2y-2)-2)} & 2y-2 \ge 2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & y < 2, \\ 4e^{-4(y-2)} & y \ge 2. \end{cases} \end{aligned}$$

2a Omdat de trekkingen uniform zijn, zijn kansen evenredig met oppervlaktes. Hieruit volgt voor $r \le x \le 1$ dat

$$\mathbb{P}(M > x) = \mathbb{P}(R_1 > x, \dots, R_n > x) = \mathbb{P}(R_1 > x)^n = \left(\frac{\pi - \pi x^2}{\pi - \pi r^2}\right)^n.$$

De verdelingsfunctie van M is dus

$$F(x) = \mathbb{P}(M \le x) = \begin{cases} 0 & x < r, \\ 1 - \left(\dfrac{1-x^2}{1-r^2}\right)^n & r \le x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Afgeleide nemen geeft de kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx(1-x^2)^{n-1}}{(1-r^2)^n} & r \le x \le 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

2b De likelihood behorend bij de geobserveerde data is

$$L(M, r) = \begin{cases} \dfrac{2nM(1-M^2)^{n-1}}{(1-r^2)^n} & r \le M \le 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Deze functie is stijgend in r zolang $r \le M$. Het maximum bevindt zich dus bij $\hat{r} = M$, en dat is de maximum likelihood schatter.

(Als men op basis van alle data $R_1, \dots, R_n$ de maximum likelihood schatter bepaalt, dan vindt men nog steeds $\hat{r} = M$.)

2c We verwerpen H_0 als alle punten ver van het midden liggen, dus het kritieke gebied voor M is van de vorm $[c, 1]$. Onder H_0 geldt

$$\mathbb{P}(M \ge c) = (1 - c^2)^n.$$

We kiezen c zo dat deze kans gelijk is aan α. Dit geeft

$$c = \sqrt{1 - \sqrt[n]{\alpha}}.$$

3a Zij $\mu_0 = 5$. Hypothesen:

$$H_0 : \mu \geq 5, \qquad H_1 : \mu < 5.$$

Met het gestandaardiseerde gemiddelde als toetsingsgrootheid vinden we

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} = -0.4\sqrt{10} \approx -1.26.$$

De toets is eenzijdig, dus de p-waarde is

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(T < -1.26) \approx 0.103 > \alpha.$$

Er is dus geen reden om de nulhypothese te verwerpen.

3b Zij $\mu_1 = 4.5$. De toetsingsgrootheid is nog steeds

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma},$$

en H_0 wordt verworpen als $T < -1.645$. Nu is T niet meer standaard normaal verdeeld, maar $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_1)$ wel. Er geldt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu_1}(T < -1.645) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0) < -1.645\right) \\ &= \mathbb{P}(\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_1) < -1.645 + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)) \\ &= \Phi(-1.645 + 0.5\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Verder geldt volgens de tabel dat $\Phi(1.28) \approx 0.9$. Oplossen van de vergelijking $-1.645 + .5\sqrt{n} = 1.28$ geeft

$$n = (2(1.28 + 1.645))^2 \approx 34.3,$$

hetgeen we moeten afronden op $n = 35$.

4a De likelihood behorend bij deze waarneming is $3p^2q$, dus

$$\phi(p,q) \propto 3p^2q \cdot \pi(p,q) \propto p^2q \qquad \text{voor } 0 \leq p \leq 1 - q \leq 1.$$

We moeten nog normaliseren om de dichtheid te vinden. Er geldt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1-q} p^2q \; dp\, dq &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}p^3q\right]_0^{1-q} dq \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}q(1-q)^3 dq = \frac{B(2,4)}{3} \int_0^1 \frac{q(1-q)^3}{B(2,4)} dq \\ &= \frac{1! \cdot 3!}{3 \cdot 5!} = \frac{1}{60},\end{aligned}$$

waarbij we gebruiken dat de laatste integraal 1 is. We vinden hiermee

$$\phi(p,q) = \frac{p^2q}{\int_0^1 \int_0^{1-q} p^2q \; dp\, dq} = 60p^2q.$$

4b De Bayes schatter is de verwachting van p onder de a posteriori verdeling.

$$\begin{aligned}T &= \int_0^1 \int_0^{1-q} p \cdot \phi(p,q) \; dp\, dq = 60 \int_0^1 \int_0^{1-q} p^3q \; dp\, dq = 60 \int_0^1 \left[\frac{1}{4}p^4q\right]_0^{1-q} dq \\ &= 15 \int_0^1 q(1-q)^4 dq = 15 \cdot B(2,5) = \frac{15 \cdot 1! \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

We schatten hiermee dat drie van de zes resterende snoepjes ook aardbeismaak hebben, dus totaal vijf in deze rol.