Tentamen Lineaire Algebra A (kans A)

Opgave 1. *(8 punten)*
Voor $k \in \mathbb{R}$ is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen gegeven:

$$\begin{aligned} kx - 2y - z &= 3 \\ (k+1)y + 4z &= 2 \\ (k-1)z &= -1 \end{aligned}$$

(i) Geef alle k waarvoor het stelsel een eenduidige oplossing heeft. Licht je antwoord toe!

(ii) Vind alle k waarvoor het stelsel meer dan één oplossing heeft.
Geef in deze gevallen de volledige oplossingsverzameling aan.

Opgave 2. *(8 punten)*
Zij T de lineaire afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ naar $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gegeven door

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -a+c & -a-b \\ a+b & b+c \end{pmatrix}.$$

(i) Geef telkens een basis van de kern $\mathrm{N}(T)$ en van het beeld $\mathrm{R}(T)$ van T.
Licht toe waarom dit inderdaad bases zijn van $\mathrm{N}(T)$ en $\mathrm{R}(T)$.

(ii) Breid een basis van het beeld $\mathrm{R}(T)$ uit tot een basis van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Leg ook hier uit, waarom je aangegeven matrices inderdaad een basis vormen van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iii) Zij $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en definieer $\mathcal{C} = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid XB = BX\}$.
Bewijs dat $\mathcal{C}$ een lineaire deelruimte is van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en bepaal de dimensie van $\mathcal{C}$.

Opgave 3. *(6 punten)*
Bewijs of weerleg (bij voorkeur door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

(i) Er bestaat geen reële 3×3-matrix A met $A^2 = -I_3$.

(ii) Voor alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ en $c \in \mathbb{R}$ geldt $\det(cI_n - A) = c^n - \det(A)$.

(iii) Voor alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ en alle kolomvectoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ geldt $\det(u\,v^t) = 0$.

z.o.z. voor Opgave 4

Opgave 4. *(9 punten)*
Van een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven dat T de eigenwaarden 1, 2 en 3 heeft met bijhorende eigenvectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Verder zij $v_0 = v_1 + v_2$.

(i) Zij $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$ de basis uit de gegeven eigenvectoren.
Bepaal de matrix $D = [T]_\gamma^\gamma$ van T met betrekking tot γ.

(ii) Is T inverteerbaar? Licht je antwoord toe.

(iii) Is v_0 een eigenvector van T? Licht je antwoord toe.

(iv) Zij β de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ en γ de basis $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$.
Geef de matrix $Q = [id]_\gamma^\beta$ aan en bereken de inverse matrix $Q^{-1} = [id]_\beta^\gamma$.

(v) Bepaal de matrix $A = [T]_\beta^\beta$ van T met betrekking tot de standaardbasis β van $\mathbb{R}^3$.

Succes ermee!