Tentamen Informatietheorie en Codes (kans A)

Opgave 1. *(7 punten)*
Gegeven is de kansverdeling $P = (\frac{8}{23}, \frac{6}{23}, \frac{4}{23}, \frac{2}{23}, \frac{2}{23}, \frac{1}{23})$.

(i) Bepaal de lengtes $l_i = \lceil \log \frac{1}{p_i} \rceil$ van de Shannon-codering voor P.

(ii) Construeer een Huffman-codering voor P, bepaal de gemiddelde codelengte van deze codering en vergelijk deze met de entropie van P.

(iii) Bepaal een kansverdeling P' voor de codewoorden uit de Huffman-codering uit deel (ii), zodat de gemiddelde codelengte bij deze kansverdeling gelijk is aan de entropie $H(P')$.

(iv) Voor de gegeven kansverdeling P geldt dat voor iedere kans p_i de lengte $l_H(p_i)$ in de Huffman-codering kleiner of gelijk is aan de lengte l_i in de Shannon-codering.

Laat door een tegenvoorbeeld zien, dat dit in het algemeen niet waar hoeft te zijn, d.w.z. vind een kansverdeling $P'' = (p_1, \ldots, p_n)$ zodat in de Huffman-codering van P'' voor een lengte $l_H(p_i)$ geldt dat $l_H(p_i) > \lceil \log \frac{1}{p_i} \rceil$.

Hint: Een kansverdeling op vier waarden is voldoende.

Opgave 2. *(6 punten)*
Laten X, Y en Z stochasten zijn met waarden in $\mathbb{F}_2$, waarbij

$$P(X = 0) = p,\ P(X = 1) = 1 - p = p', \qquad P(Y = 0) = q,\ P(Y = 1) = 1 - q = q'.$$

De stochast Z is de som van X en Y, dus $Z = X + Y$.
Je kunt hierbij X beschouwen als input van een kanaal, Y als ruis en Z als de output van het kanaal.

(i) Bepaal voor het speciale geval $q = \frac{1}{2}$ de kansverdeling $P(Z)$ en de informatie $I(X \mid Z)$ die Z over X onthult.

Licht toe, waarom je het resultaat ook intuïtief had kunnen verwachten.

(ii) Bepaal $P(Z)$ en $I(X \mid Z)$ voor algemene q.

(iii) Stel nu $p = \frac{1}{2}$, d.w.z. de inputs zijn uniform verdeeld. Bepaal ook in dit geval de informatie $I(X \mid Z)$ die Z over X onthult.

Bereken de waarde van deze informatie voor $q = 0.9$.

z.o.z. voor Opgave 3

Opgave 3. *(10 punten)*

Gegeven is de generator matrix $G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ voor de ternaire $[4, 2]$-Hamming code $\mathcal{H}_4$ over $\mathbb{F}_3$. We weten dat $\mathcal{H}_4$ een zelfduale code is met minimum afstand 3.

(i) Je ontvangt de woorden $y_1 = (1, -1, 0, 0)$, $y_2 = (1, -1, 0, -1)$ en $y_3 = (-1, 1, -1, 1)$.

Decodeer deze woorden middels minimum afstand decodering (dat overeenkomt met maximum likelihood decodering).

(ii) Je verstuurt de codewoorden van de Hamming code $\mathcal{H}_4$ via een *ternair symmetrisch kanaal* met overgangsmatrix $\begin{pmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & 1-p \end{pmatrix}$.

Via dit kanaal blijft een symbool met kans $1 - p$ correct en wordt met kans p veranderd (telkens met kans $\frac{p}{2}$ naar ieder van de twee andere symbolen).

Wat is de kans p_E op een decoderingsfout als de codewoorden van de Hamming code $\mathcal{H}_4$ via dit kanaal verstuurd worden? Bepaal p_E concreet voor $p = 10\%$ en $p = 1\%$.

(iii) De bitrate R van de Hamming code $\mathcal{H}_4$ is natuurlijk $R = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Bepaal de capaciteit van het ternaire symmetrische kanaal voor $p = 10\%$ en laat zien dat deze boven de bitrate van de Hamming code $\mathcal{H}_4$ ligt.

Let op: Omdat we over $\mathbb{F}_3$ werken, moet je in de entropie de logaritme met grondtal 3 gebruiken.

Zij verder I de 4×4-eenheidsmatrix en J de 4×4-matrix met alle elementen 1. Definieer dan de generator matrix G van een lineaire $[12, 6]$-code $\mathcal{C}$ over $\mathbb{F}_3$ door

$$G = \begin{pmatrix} J+I & I & I \\ 0 & G_0 & -G_0 \end{pmatrix}$$

(met G_0 de generator matrix van $\mathcal{H}_4$). De matrix G heeft rang 6, omdat $I + J$ rang 4 heeft (want $\det(I + J) = -1$ over $\mathbb{F}_3$).

(iv) Laat zien dat $\mathcal{C}$ een zelfduale code is.

(v) Bewijs dat voor iedere lineaire zelfduale code over $\mathbb{F}_3$ geldt, dat de minimum afstand d een veelvoud is van 3.

(vi) Ga na dat $\mathcal{C}$ minimum afstand 6 heeft.

Succes ermee!