Tentamen [Extra tijd]	**Inleiding in de Grafentheorie**	26 oktober 2020
De Vereeniging [HG00.068]		8.30–10.30 [11.00]

Let op: soms zijn er meer vragen per onderdeel. In de kantlijn staat het aantal te behalen punten. Op het Antwoordblad kun je de antwoorden van de vragen met een *, 3(b) en 3(c), invullen. Ook zijn er nog wat figuren voor kladversies bijgevoegd. Lever alle bladen in en vergeet niet op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam te schrijven. Als je dat doet krijg je 5 punten kado.

1. Deze opgave gaat over bipartiete grafen. Een *vierhoek* is een graaf isomorf met $K_{2,2}$.

3 pt (a) Geef de definities voor *volledig bipartiete graaf* $K_{m,n}$, voor *deelgraaf*, en voor *bipartiete graaf*.

3 pt (b) Laat zien dat $K_{3,2}$ drie vierhoeken bevat, en bewijs dat $\frac{m(m-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ het aantal vierhoeken is dat $K_{m,n}$ bevat, voor $m, n \geq 2$.

4 pt (c) Bewijs: $K_{3,2}$ bevat $\frac{6\times5}{2} = 15$ verschillende bipartiete deelgrafen met 4 lijnen; beargumenteer ook dat 6 daarvan isomorf zijn met P_4, het pad van lengte 4. (Je krijgt de helft van de punten als je dit alleen met plaatjes aantoont.)

2. Het niet-ingevulde schema hieronder (links) geeft voor een te ontwerpen rooster weer welk van de leraren A, B, C, D aan welk van de klassen a, b, c, d, e een uur les dient te geven; een $\times$ betekent dat de leraar van die rij *géén* les hoeft te geven aan de klas van de betreffende kolom:

	a	b	c	d	e
A		$\times$		$\times$	
B			$\times$		$\times$
C		$\times$		$\times$	
D	$\times$				$\times$

	a	b	c	d	e
A	1	$\times$	2	$\times$	3
B	2	3	$\times$	1	$\times$
C	3	$\times$	1	$\times$	2
D	$\times$	2	3		$\times$

Rechts heeft iemand getracht het rooster snel in te vullen.

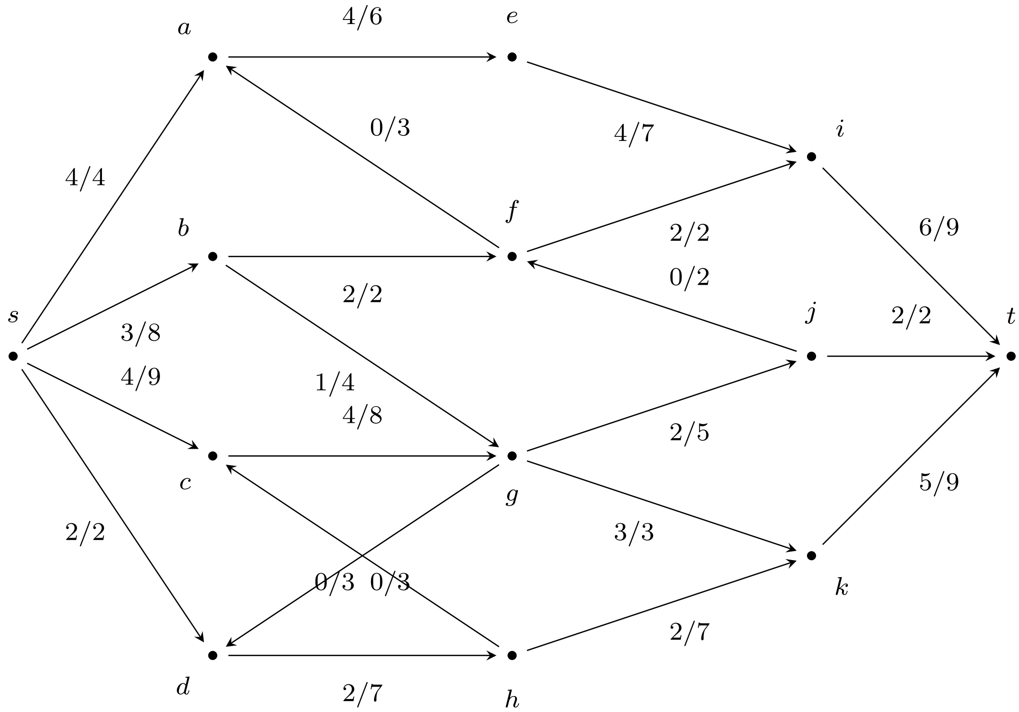
4 pt (a) Formuleer (zorgvuldig) de stelling die je vertelt wat in een niet-ingevuld schema (zoals links) het minimale aantal uren m is dat les gegeven moet gaan worden. Wat is hier dat minimale aantal m?

4 pt (b) Rechts is één lesuur niet ingevuld, en dat kan zonder verdere wijzigingen ook niet (tenzij een vierde lesuur wordt ingevoerd). In het dictaat wordt uitgelegd met welke wijzigingen dat wel gaat lukken. Teken daartoe eerst (niet te klein!) de bij bovenstaand ingevulde rooster behorende bipartiete graaf met lijnkleuring. (Je mag natuurlijk cijfers voor kleuren gebruiken.)

De aanwijzing luidt hier: *Er is een kleur i die in D nog niet gebruikt wordt en een kleur $j \neq i$ die in d nog niet gebruikt wordt; vind het langste pad P vanuit D waarin afwisselend de kleuren j en i gebruikt worden. Dan kun je die kleuren op P omwisselen, en nu kun je kleur j gebruiken voor lijn $\{D, d\}$.*

4 pt (c) Geef het pad P in jouw bipartiete graaf duidelijk aan, en teken de bipartiete graaf opnieuw na verwisseling van de kleuren op P en het kleuren van $\{D, d\}$. Geef ook het resulterende rooster.

3. Deze opgave gaat over onderstaand netwerk. Bij alle pijlen zijn twee getallen gegeven: het eerste is de stroom door de pijl, het tweede de capaciteit van die pijl.



3 pt (a) Je kunt wel zien dat (s, b, g, d, h, k, t) een stroomvermeerderend pad is. Hoe groot is de grootste stroom die je via dit pad kunt toevoegen, en wat wordt dan de waarde van de totale stroom in het netwerk?

3 pt (b)* Teken op het Antwoordblad de volledige hulpgraaf bij de stroom in het netwerk die ontstaat na (a), en vind daarin een stroomvermeerderend pad. Geef dit $s-t$-pad duidelijk aan, en ook de grootste stroom door dat pad waarmee je de stroom kunt vermeerderen.

5 pt (c)* Als je de beide voorgaande stappen hebt uitgevoerd, heb je een maximale stroom in het netwerk gevonden. Geef die maximale waarde, een verzameling punten U en de pijlen $\delta^+(U)$ voor een snede met minimale capaciteit.

4. Deze opgave gaat over kleuringen.

4 pt (a) De *kubusgraaf* K is als volgt te definiëren: de punten van K corresponderen precies met drietallen (a, b, c) met $a, b, c \in \{0, 1\}$, en er is een lijn tussen twee zulke drietallen als ze op precies één positie verschillen (dus $(0, 0, 0)$ en $(1, 0, 0)$ zijn punten die buren zijn, maar $(0, 0, 0)$ en $(1, 1, 1)$ zijn geen buren, bijvoorbeeld). Maak een tekening van K waaruit duidelijk blijkt dat deze planair is.

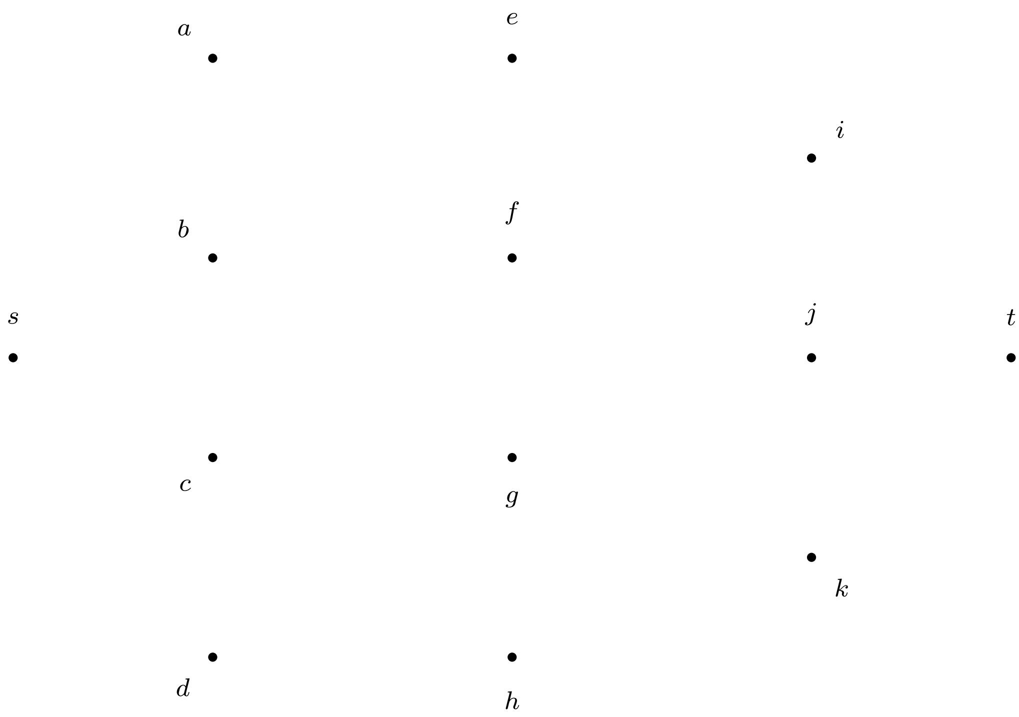
4 pt (b) Bewijs voor het kleurgetal $\chi(K) = 2$ en voor het lijnkleurgetal $\chi'(K) = 3$.

4 pt (c) Het is mogelijk om een graaf H te maken door aan K precies 3 lijnen toe te voegen zodat H nog planair is maar $\chi(H) = 4$. Teken H zodat blijkt dat deze planair is, bewijs dat $\chi(H) = 4$ en bepaal ook $\chi'(H)$.

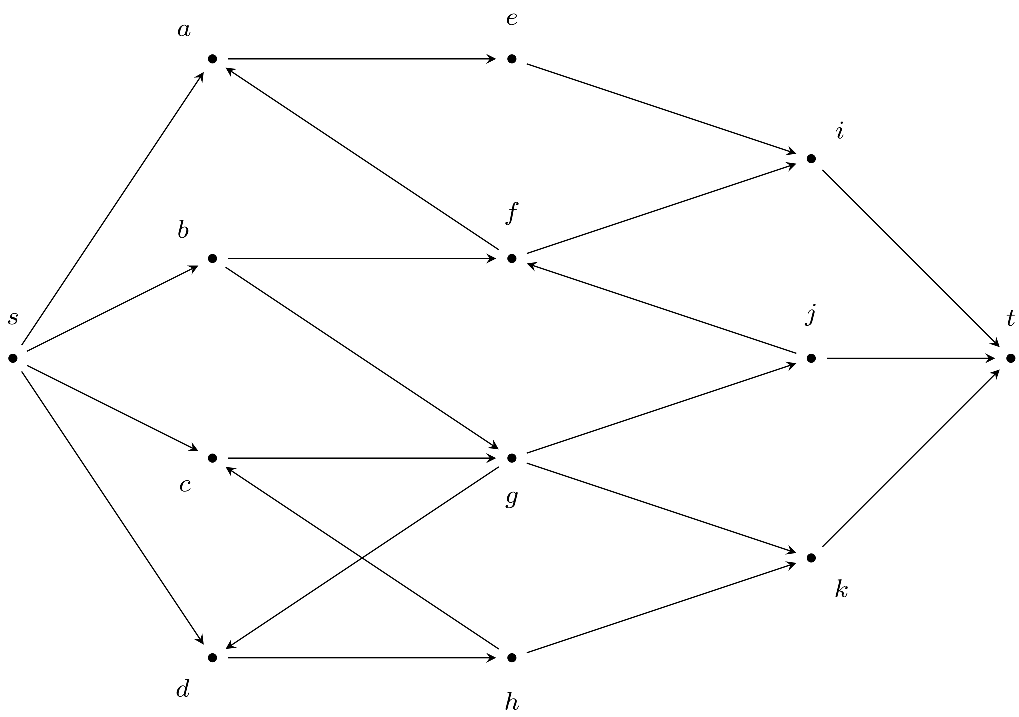
Tot. 45 pt

Antwoordblad

3(b) Hulpgraaf:



3(c) Maximale stroom en minimale snede:



Klad