Tentamen [Extra tijd]	**Lineaire Algebra A**	**14 januari 2019**
LIN 1&2 [HG00.071]		8.30–11.30 [12.00]

In de volgende 5 opgaven zijn maximaal 6 punten te behalen voor elk van de 15 onderdelen, maximaal 90 in totaal. Als elk blad dat je inlevert duidelijk voorzien is van je naam, krijg je 10 punten kado.

1. Gegeven is de deelverzameling V van $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & y \\ 0 & y & w \end{pmatrix} :\ w, x, y, z \in \mathbb{R},\ x + y = z + w \right\}$$

met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging van reële matrices.

(i) Laat zien dat V een reële vectorruimte is.
(ii) Geef een deelverzameling B van elementen van $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ die een basis voor V vormen, en bewijs ook dat B een basis is.
(iii) Geef een deelverzameling C van elementen uit $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ zodat $B \cup C$ een basis voor $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ vormt.

2. Toon in de volgende onderdelen je berekeningen.

(i) Geef alle oplossingen (in $\mathbb{R}$) voor het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

(ii) Bepaal (door vegen in de matrix $B|I_3$) de inverse van de reële matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Bewijs dat voor elk reëel getal r de kern van

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2r \\ r & r+1 & r^2 \\ -2r & -r-2 & 0 \end{pmatrix}$$

niet gelijk is aan $\{0\}$.

3. Bewijs of weerleg (met een expliciet tegenvoorbeeld) deze beweringen.

(i) De matrix $D \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$, dus over het lichaam met twee elementen:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is inverteerbaar.

(ii) Laat P_k de lineaire ruimte van reële polynomen van graad ten hoogste k zijn; met g' geven we de afgeleide van g aan. Bewering: de afbeelding $T : P_2 \to P_3$ gedefinieerd door $T(f) = (f^2)'$ is lineair.

(iii) Voor reële vierkante matrices A geldt: $\det(A \cdot A^{\mathsf{T}}) > 0 \iff A$ inverteerbaar.

4. Deze opgave gaat over transformaties van $\mathbb{R}^n$.

(i) Geef een voorbeeld van een transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ waarvoor $\ker T = R(T)$, dus de kern is gelijk aan het beeld.

(ii) Bewijs dat er geen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kan bestaan waarvoor $\ker T = R(T)$.

(iii) Geef een voorbeeld van een $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die niet injectief is en ook niet surjectief, maar waarvoor $\ker T$ bevat is in $R(T)$.

5. In deze opgave wordt een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^3$ naar zichzelf gegeven door de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal het karakteristieke polynoom van M.

(ii) Laat zien dat 3 een eigenwaarde voor M is en bepaal de eigenruimte E_3.

(iii) De matrix M heeft ook twee complex-imaginaire eigenwaarden; bepaal deze en geef van één daarvan ook de bijbehorende eigenruimte.