Tentamen [Extra tijd]	**Inleiding in de Grafentheorie**	26 oktober 2018
LIN 1/5 [HG00.068]		8.30–10.30 [11.00]

In sommige onderdelen van de volgende **vier** *opgaven worden meerdere vragen gesteld — vergeet niet die allemaal te beantwoorden! In de kantlijn staat het aantal te behalen punten per onderdeel. Op het Antwoordblad kun je de antwoorden van 2(b) en van 3(b), (c) en 4(c) invullen.*

1. Over isomorfie, lijngrafen en samenhang.

6 pt (a) De *Klauwgraaf* Kl_n is voor $n \geq 1$ een graaf met $n+1$ punten $v_0, v_1, \ldots v_n$, waarin alleen de lijnen $\{v_0, v_i\}$ bestaan, voor $i = 1, 2, \ldots n$. Laat zien dat de lijngraaf $L(\mathrm{Kl}_n)$ de volledige graaf K_n is.

6 pt (b) Geef de definitie van *isomorfie* van grafen.

6 pt (c) We bekijken de verzameling $\mathcal{V}$ van alle grafen G op 7 punten die uit precies 2 componenten bestaan. Bepaal het minimale aantal lijnen dat G moet hebben en het maximale aantal lijnen dat G kan hebben (en motiveer je antwoorden).

6 pt (d) Maak een duidelijke tekening van tenminste zes niet-isomorfe grafen uit deze verzameling $\mathcal{V}$ met precies 6 lijnen (bewijzen van niet-isomorfie niet nodig).

2. Deze opgave gaat over de toepassing van grafentheorie op roosterproblemen.

6 pt (a) De matrix hieronder geeft voor een te ontwerpen schoolrooster weer welk van de leraren $A, B, \ldots, F$ aan welk van de klassen $a, b, \ldots, g$ een uur les dient te geven: een $\times$ betekent dat de leraar van die rij *géén* les hoeft te geven aan de klas van de betreffende kolom:

	a	b	c	d	e	f	g
A			$\times$			$\times$	
B	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	
C		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	
D	$\times$	$\times$		$\times$			
E	$\times$		$\times$			$\times$	$\times$
F	$\times$	$\times$		$\times$			$\times$

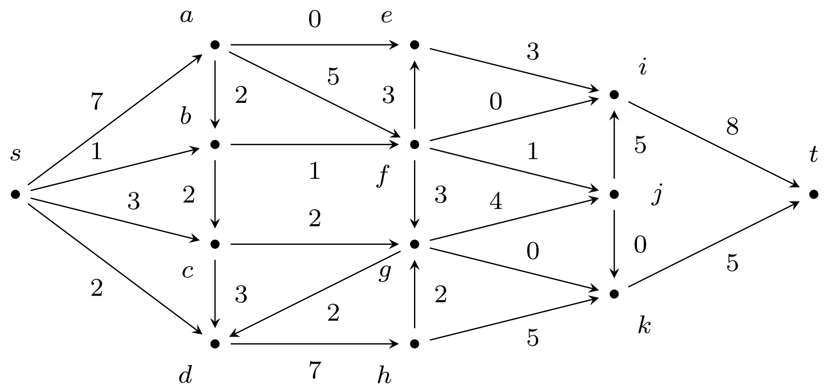
Een stelling uit de grafentheorie geeft een simpele methode om uit deze matrix af te lezen hoeveel uren er minstens les gegeven moet worden (leraren en klassen kunnen maar één les in één uur hebben). Formuleer deze stelling en leg uit hoe je die hier kunt toepassen. In hoeveel uur kunnen de lessen afgewerkt worden?

6 pt (b)* Wegens bezuigingen moet er een rooster komen dat in 3 uur is af te werken; wat is het minimale aantal lessen in de matrix uit (a) dat moet komen te vervallen om dit voor elkaar te krijgen? Geef een minimale oplossing aan door symbolen $\times$ toe te voegen aan de matrix (op het Antwoordblad).

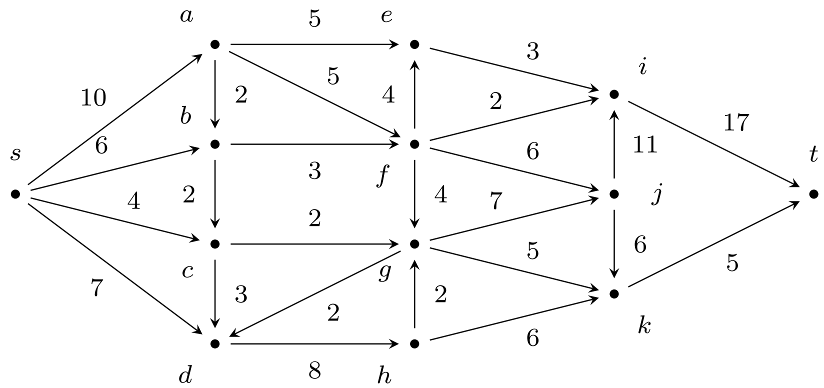
6 pt (c) Teken de bipartiete graaf die correspondeert met je oplossing van (b) en geef er een lijnkleuring in aan met zo weinig mogelijk kleuren.

3. Deze opgave gaat over onderstaand netwerk.

6 pt (a) In het netwerk is een *s–t-stroom* aangegeven, maar bij één pijl staat een verkeerde stroomgrootte. Bij welke pijl, en wat moet de grootte wel zijn? Wat is de *waarde* van de stroom in het hele netwerk dan? Gebruik de gecorrigeerde stroom in de volgende onderdelen.



6 pt (b)* Hieronder staan bij alle pijlen de *capaciteiten* aangegeven. Teken op het Antwoordblad een deel van de hulpgraaf voor het vinden van stroomvermeerderende paden, en geef hierin ook duidelijk een stroomvermeerderend s–t-pad aan, met de waarde van die stroom.



6 pt (c)* Vind met deze methode zoveel mogelijk stroomvermeerderende paden (je hoeft niet meer hulpgrafen in te leveren), en bepaal zo de waarde van de maximale stroom; geef deze maximale stroom en de waarde ervan duidelijk aan op het Antwoordblad.

6 pt (d) Vind een snede met minimale capaciteit: geef de snede U en de capaciteit van $\delta^+(U)$. Je mag U aangeven op de Antwoordblad of geven door een lijst van punten.

4. Over planariteit en over kleuringen.
We maken gebruik van de Eulerformule, die voor een samenhangende planaire graaf met n punten, m lijnen en f facetten zegt dat $n + f = m + 2$.

6 pt (a) Als G een planaire graaf is met m lijnen (minstens 2) en f facetten zonder driehoeken, dan geldt $2f \leq m$; bewijs dat.

6 pt (b) Gebruik (a) om te laten zien dat de volledig bipartiete graaf $K_{3,3}$ niet planair is.

We bekijken vervolgens deelgrafen van de volledige graaf K_6 op de punten $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Deze graaf is zelf niet planair, en we laten zien dat het weghalen van drie lijnen kan, maar het weghalen van zes lijnen niet hoeft, te leiden tot een planaire graaf.

6 pt (c)* Laat door een overtuigende tekening op het Antwoordblad zien dat de graaf H die ontstaat door uit K_6 de drie lijnen van het pad $(1, 2, 3, 4)$ te verwijderen, wél planair is.

6 pt (d) Bewijs dat voor het kleurgetal geldt: $\chi(H) = 4$.

6 pt (e) Laat de graaf J ontstaan uit K_6 door de zes lijnen te verwijderen die de driehoeken $\{1, 2, 3\}$ en $\{4, 5, 6\}$ vormen. Bepaal $\chi(J)$ en bewijs dat J níet planair is.

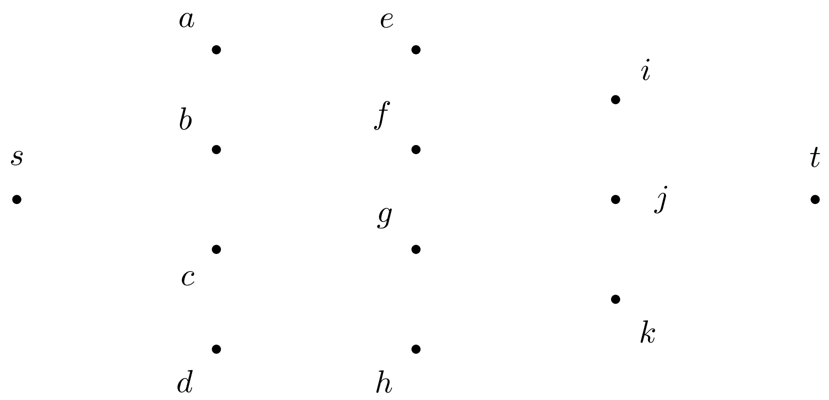
Tot. 96 pt

Antwoordblad

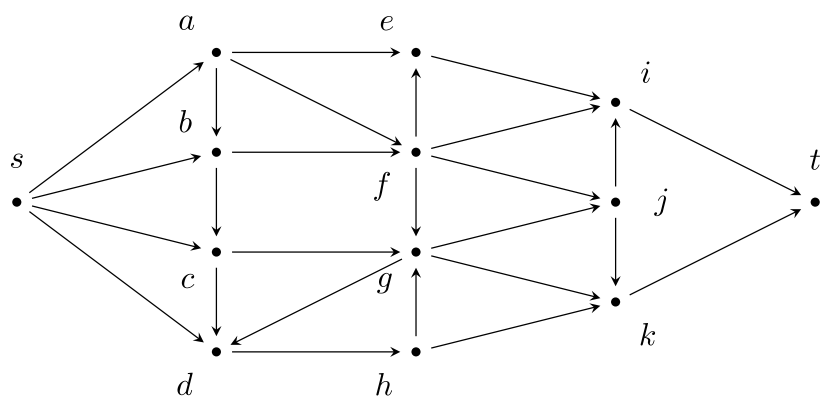
2(b) Resulterend rooster:

	a	b	c	d	e	f	g
A			×			×	
B	×		×	×		×	
C		×	×		×	×	
D	×	×		×			
E	×		×			×	×
F	×	×		×			×

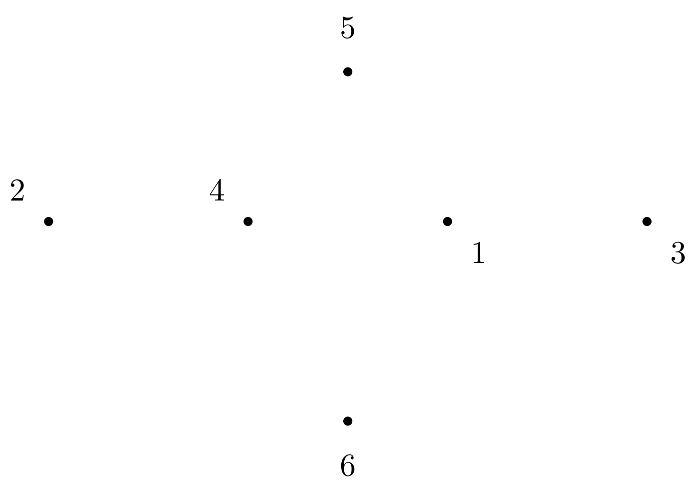
3(b) Hulpgraaf met stroomvermeerderend pad:



3(c) Maximale stroom:



4(c) Planaire graaf H:



Klad