Tentamen (take-home)
Manifolds (WB079C) – 11 januari 2021

Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student.

Het tentamen bestaat uit twee opgaven op twee pagina's. Succes!

1. **De torus**

   We bekijken de twee-dimensionale torus $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ als gladde variëteit (zoals in [Lee, Example 1.34]).

   (a) Laat zien dat $T(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ als gladde variëteiten. Geef duidelijk aan welke resultaten je gebruikt uit het boek van Lee.

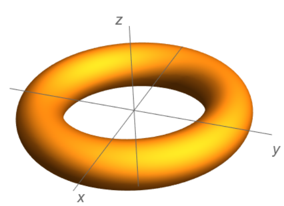
   We beschrijven $\mathbb{T}^2$ lokaal door middel van coördinaten $(s,t) \in U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ en bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} F|_U &: U \to \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto (x,y,z) = (b + a\cos s)(\cos t, \sin t, 0) + a \sin s(0,0,1), \end{aligned}$$

   met daarin a en b constantes zodat $0 < a \leq b$.

   (b) Laat zien dat $F|_U$ uniek uitbreidt tot een gladde afbeelding $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$.

   Voor een impressie, het beeld van F voor $a = 1/2, b = 2$ ziet er als volgt uit:



   (c) Geef de coördinatenrepresentatie van $dF_{(s,t)}$ (in de coördinaten (s,t) en (x,y,z)).

   (d) Druk $dF_{(s,t)}(\partial/\partial t)$ uit in de coördinaten (x,y,z).

   (e) Geef alle waarden van de constantes a, b waarvoor F een immersie is (en bewijs je bewering).

   (f) Geef alle waarden van a en b waarvoor de afbeelding F een inbedding is (opnieuw, met bewijs). Je mag hier gebruik maken van [Lee, Proposition 4.22].

   (g) Als $0 < b < a$ dan blijkt de gladde afbeelding $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$, gedefinieerd zoals hierboven, wel een immersie, maar niet injectief te zijn. Maak een schets van het beeld van F voor $a = 1$ en $b = 1/2$.

... het tentamen gaat verder op de volgende pagina!!

2. **Differentiaalvormen op een Lie groep**

Stel G is een Lie groep. We hebben al eerder kennis gemaakt met links-invariante vectorvelden op G; nu gaan we kijken naar links-invariante differentiaalvormen op G.

Stel $\omega \in \Omega^k(G)$, een k-differentiaalvorm. Herinner je dat de links-vermenigvuldiging $L_g : G \to G$ met een element $g \in G$ een diffeomorfisme is. We kunnen dus de pullback $L_g^*\omega$ van ω langs L_g bekijken; dit is opnieuw een element in $\Omega^k(G)$.

We noemen nu ω een *links-invariante differentiaalvorm* op G als geldt dat $L_g^*\omega = \omega$ voor alle $g \in G$.

(a) Laat met een korte berekening zien dat ω links-invariant is dan en slechts dan als geldt dat $(dL_g)^*_{g^{-1}h}(\omega_h) = \omega_{g^{-1}h}$ voor alle $g, h \in G$.

Schrijf $\Omega^k(G)^{\text{inv}} \subseteq \Omega^k(G)$ voor de deelvectorruimte van alle links-invariante differentiaalvormen van graad k.

(b) Laat zien dat de volgende lineaire afbeelding een isomorfisme is:

$$\phi : \Omega^k(G)^{\text{inv}} \to \bigwedge^k(\text{Lie}(G)^*), \qquad \phi(\omega)(X_1, \ldots, X_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k).$$

met daarin $X_1, \ldots, X_k \in \text{Lie}(G)$, de ruimte van links-invariante vectorvelden op G. (Herinner je dat $\text{Lie}(G)^*$ staat voor de duale vectorruimte van $\text{Lie}(G)$.)

(c) Laat zien dat de uitwendige afgeleide $d : \Omega^k(G) \to \Omega^{k+1}(G)$ links-invariante differentiaalvormen op links-invariante differentiaalvormen afbeeldt.

(d) Met behulp van het isomorfisme uit (b) definiëren we de lineaire afbeelding

$$d' = \phi \circ d \circ \phi^{-1} : \bigwedge^k(\text{Lie}(G)^*) \to \bigwedge^{k+1}(\text{Lie}(G)^*),$$

Bewijs (met behulp van het boek van Lee) dat deze afbeelding kan worden geschreven als

$$d'(T)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}) \tag{1}$$

met $T \in \bigwedge^k(\text{Lie}(G)^*)$ en $X_1, \ldots, X_k \in \text{Lie}(G)$ (en $\widehat{X_i}$ betekent weglating van de term X_i).

(e) Bewijs direct met bovenstaande formule (1) dat $(d')^2 = 0$.

——————————||——————————

Puntenverdeling (totaal 90pt + 10pt uit de quiz):

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	2a	2b	2c	2d	2e
5	10	10	5	10	10	5	5	10	5	10	5