Discrete Wiskunde (WB011) **26 Oktober 2020**

Scoremodel tentamen

Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek is toegestaan. Dit tentamen duurt twee uur.

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. In totaal zijn er 29 punten te verdienen.

Het cijfer dat je krijgt is 1 + 9 × aantal gehaalde punten / 29. Dit wordt afgerond op halve punten. Uitzondering zijn cijfers tussen de 5 en de 6: deze cijfers worden afgerond op hele punten. Kortom, je hebt een voldoende, dus een cijfer 6 of hoger, als je minstens $29/2 = 14.5$ *punten hebt gehaald.*

Opgave 1 (6 punten)**.** Een vast punt van een permutatie σ van $[n]$ is een $j \in [n]$ zodat $\sigma(j) = j$. Hoeveel permutaties van [7] zijn er waarbij geen enkele $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ een vast punt is? Reken het antwoord helemaal uit (dus geef naast de berekening uiteindelijk ook een getal).

Oplossing 1.
Dit kan met inclusie exclusie worden opgelost $\boxed{1}$ (dit punt kan je ook verdienen door de formule te geven toegepast op dit probleem zoals onder). Het is een variatie op het standaard derangement probleem.
Voor $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ zij j de eigenschap dat j een vast punt is $\boxed{1}$ Er moet beschreven worden welke eigenschappen gebruikt worden bij inclusie exclusie. Als dit ontbreekt dan wordt dit punt niet toegekend (ook al zijn de berekeningen en het antwoord goed).
Gevraagd is het aantal permutatie dat aan geen van de eigenschappen voldoet, en dat is $N_=(\emptyset)$.
Voor $J \subset \{1, 3, 5, 7\}$ is $N_\geq(J)$ het aantal permutaties van [7] dat in ieder geval de $j \in J$ als vast punt hebben. We tellen dan dus de mogelijkheden om de niet vaste punten $[7] \setminus J$ te permuteren en dan kan op $N_\geq(J) = (7 - |J|)!$ manieren, $\boxed{1}$ voor de uitleg en $\boxed{1}$ voor (gebruik van) de formule.
De formule van inclusie exclusie geeft nu dat

$$\begin{aligned}
N_=(\emptyset) &= \sum_{J\subset\{1,3,5,7\}} (-1)^{|J|} N_\geq(J) \\
&= \sum_{J\subset\{1,3,5,7\}} (-1)^{|J|}(7 - |J|)! \\
&= \sum_{k\geq 0} \sum_{J\subset\{1,3,5,7\},|J|=k} (-1)^k(7 - k)! \\
&= \sum_{k\geq 0} \binom{4}{k} (-1)^k(7 - k)! & \boxed{2} \\
&= \binom{4}{0}7! - \binom{4}{1}6! + \binom{4}{2}5! - \binom{4}{3}4! + \binom{4}{4}3! \\
&= 2790
\end{aligned}$$

De laatste twee stappen leveren geen extra punten op, maar kunnen één punt kosten als er fouten worden gemaakt, maar alleen als de stap daar voor al goed was.

Opgave 2 (1 + 2 + 2 punten)**.** Bij alle onderdelen van deze opgave geldt dat je het aantal niet helemaal hoeft uit te rekenen: een uitdrukking met behulp van de bekende getallenfamilies en/of binomiaalcoëfficiënten is voldoende.
We verdelen 10 personen over een aantal niet lege groepen (de groepen zijn niet geordend).

(a) Op hoeveel manieren kan dit?

(b) Op hoeveel manieren kan dit in twee groepen van 5 personen?

(c) Op hoeveel manieren kan dit als er minstens één groep is die 5 personen bevat?

Oplossing 2.

(a) $B(10) = 115975$ $\boxed{1}$
Je hoeft geen uitleg te geven omdat dit een standaard telprobleem is.
Het antwoord $\sum_{i \geq 0} S(10, i)$ is $\boxed{0.5}$ waard.

(b) $\frac{1}{2}\binom{10}{5} = 126$
$\boxed{1}$ voor $\binom{10}{5}$,
en $\boxed{1}$ voor het delen door twee vanwege verwisselbaar
Je hoeft geen uitleg te geven omdat dit een standaard telprobleem is.
Geen punten voor het antwoord $\frac{10!}{5!}$

(c) Vanwege onderdeel (a) en (b) levert het antwoord $B(5) \cdot \binom{10}{5}$ geen punten op.

Voor de groep van 5 zijn er $\binom{10}{5} = 252$ mogelijkheden. De overige 5 kunnen we op $B(5) = 52$ manieren indelen. Nu tellen we echter alle indelingen van de vorm twee groepen van 5 dubbel $\boxed{2}$. Dat zijn er $\frac{1}{2}\binom{10}{5}$. In totaal zijn het er dus

$$\binom{10}{5} \cdot B(5) - \frac{1}{2}\binom{10}{5} = 252 \cdot 52 - \frac{252}{2} = 12978.$$

Alternatief. We maken gevalsonderscheid. Ofwel er zijn twee groepen van 5 $\boxed{1}$. Dat kan op $\frac{1}{2}\binom{10}{5}$ manieren. Ofwel er is één groep van 5, die op $\binom{10}{5} = 252$ manieren gekozen kan worden, en daarnaast wordt de rest over meer dan 1 groep verdeeld, wat kan op $B(5) - 1 = 51$ manieren $\boxed{1}$. In totaal zijn het er dus

$$\binom{10}{5} \cdot (B(5) - 1) + \frac{1}{2}\binom{10}{5} = 252 \cdot 51 + \frac{252}{2} = 12978.$$

Opgave 3 (6 punten)**.** We beschouwen in deze opgave partities van het getal n. Het Durfeevierkant van zo'n partitie is het grootste vierkant dat in het Ferrersdiagram van die partitie past. Dit Durfeevierkant is dus een d bij d vierkant als d maximaal is met de eigenschap dat er minstens d delen zijn die minstens d groot zijn.
Een partitie heet zelfgeconjugeerd als de gespiegelde (in de diagonaal) van het Ferrersdiagram weer hetzelfde Ferrersdiagram geeft.
Bewijs dat er $P(\frac{n-d^2}{2}+d,d)$ zelfgeconjugeerde partities zijn van het getal n waarvan het Durfeevierkant van grootte d bij d is.

Oplossing 3. Er zijn $P(\frac{n-d^2}{2}+d,d)$ partities van $(n-d^2)/2+d$ in d delen $\boxed{1}$.

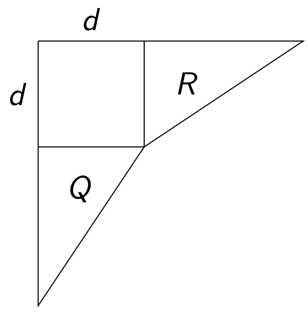
Dit aantal is volgens een stelling uit het boek ook gelijk aan het aantal partities van $(n-d^2)/2$ in hoogstens d delen $\boxed{2}$.

We geven een bewijs door een bijectie te beschrijven van zelfgeconjugeerde partities van n met Durfeevierkant van grootte d naar partities van $(n-d^2)/2$ in hoogstens d delen.

Gegeven een zelfgeconjugeerde partitie P van n met Durfeevierkant van grootte d. Dan bestaat P uit drie delen $\boxed{1}$:

1. het d bij d Durfeevierkant,
2. een partitie, zeg Q (onder het vierkant),
3. een partitie, zeg R (rechts van het vierkant).

In plaats van een beschrijving kan je dat punt ook krijgen voor een plaatje / schets.



Q heeft delen niet groter dan d, en R bestaat uit hoogstens d delen $\boxed{1}$.

Omdat P zelfgeconjugeerd is moet gelden dat Q de geconjugeerde is van R. In het bijzonder bevatten Q en R evenveel punten, namelijk $(n-d^2)/2$ $\boxed{1}$.

Omdat het vrij flauw is dat dit een bijectie is, krijg je geen punten voor dit laatste stuk van het bewijs (maar het kost je ook niets als je het niet opgeschreven hebt). De bijectie is nu beschreven door de afbeelding $P \mapsto R$. We bewijzen dat die een bijectie is door te laten zien dat de afbeelding inverteerbaar is. Gegeven een partitie R van $(n-d^2)/2$ in hoogstens d delen. Zij Q de geconjugeerde van R. Maak de partitie P door Q onder en R rechts van een d bij d vierkant te plaatsen. Dan is P een zelfgeconjugeerde partitie van n met Durfeevierkant van grootte d.

Alternatief als de stap naar hoogstens d delen niet vooraf wordt gedaan. Als we R aanvullen met lege delen tot deze d delen heeft, en dan aan elk deel 1 toevoegen, verkrijgen we een partitie, zeg S van $(n-d^2)/2+d$ in precies d delen $\boxed{2}$ (deze punten vervangen dan de vooraf overgeslagen stap). De bijectie is nu beschreven door de afbeelding $P \mapsto S$.

Dat dit een bijectie is, is duidelijk, omdat het inverteerbaar is. Gegeven een partitie S van $(n-d^2)/2+d$ in precies d delen, maak een partitie, zeg R van $(n-d^2)/2$ in hoogstens d delen door van elk deel er 1 af te halen. Zij Q de geconjugeerde van R. Maak de partitie P door Q onder en R rechts van een d bij d vierkant te plaatsen. Dan is P een zelfgeconjugeerde partitie van n met Durfeevierkant van grootte d.

Opgave 4 (4 punten)**.** Gegeven een verzameling X en een partiële ordening $(Y, \leq)$. Zij f een functie van type $X \to Y$. Definieer de relatie $\preceq$ op X door $x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Toon aan dat $(X, \preceq)$ een partiële ordening is dan en slechts dan als f injectief is.

Oplossing 4.
Stel $x \in X$. Dan is $x \preceq x$ omdat $f(x) \leq f(x)$ omdat $(Y, \leq)$ reflexief is. We hebben nu bewezen dat $(X, \preceq)$ reflexief is (zonder te gebruiken dat f injectief is) $\boxed{1}$.

Stel $a \preceq b$ en $b \preceq c$ voor $a, b, c \in X$. Dan geldt per definitie $f(a) \leq f(b)$ en $f(b) \leq f(c)$. Omdat Y transitief is, geldt $f(a) \leq f(c)$. Dus per definitie geldt ook $a \preceq c$. We hebben nu aangetoond dat $(X, \preceq)$ transitief is (zonder te gebruiken dat f injectief is) $\boxed{1}$.

Nu is $(X, \preceq)$ een partiële ordening desda de drie eigenschappen reflexief, transitief en anti-symmetrisch gelden. Het volstaat dus nog te bewijzen dat $(X, \preceq)$ anti-symmetrisch is desda f injectief is.

$$\begin{gathered}
f \text{ injectief} \\
\Leftrightarrow \\
f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b \\
\Leftrightarrow \text{(gebruik anti-symmetrie van } (Y, \leq)) \Leftrightarrow \\
f(a) \leq f(b) \text{ en } f(b) \leq f(a) \quad \Rightarrow \quad a = b \\
\Leftrightarrow \\
a \preceq b \text{ en } b \preceq a \quad \Rightarrow \quad a = b \\
\Leftrightarrow \\
(X, \preceq) \text{ is anti symmetrisch}
\end{gathered}$$

$\boxed{2}$ voor dit laatste stuk, één punt per implicatie

Opgave 5 (1 + 1 + 3 + 3 punten)**.** Een functie $f\colon [n] \to [n]$ heet idempotent als $f(f(k)) = f(k)$ voor alle $k \in [n]$. Zij a_n het aantal idempotente functies van type $[n] \to [n]$. We spreken af dat $a_0 = 1$.

(a) Laat met behulp van volledige enumeratie zien dat $a_3 = 10$.

(b) Laat zien dat (dit lijkt los te staan van de opgave, maar we hebben het nodig in onderdeel (c)):

$$(1+x)e^x = \sum_{j\geq 0}(j+1)\frac{x^j}{j!}.$$

(c) Neem voor dit onderdeel aan (zonder dit te bewijzen, maar zie onderdeel (d)) dat de volgende recursieve formule geldt:

$$n \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}a_{n-k}.$$

Zij $F(x)$ de exponentiële voortbrengende functie (EGF) van de rij $(a_n)_{n\geq 0}$. Laat zien dat:

$$F'(x) = (x+1)e^x F(x).$$

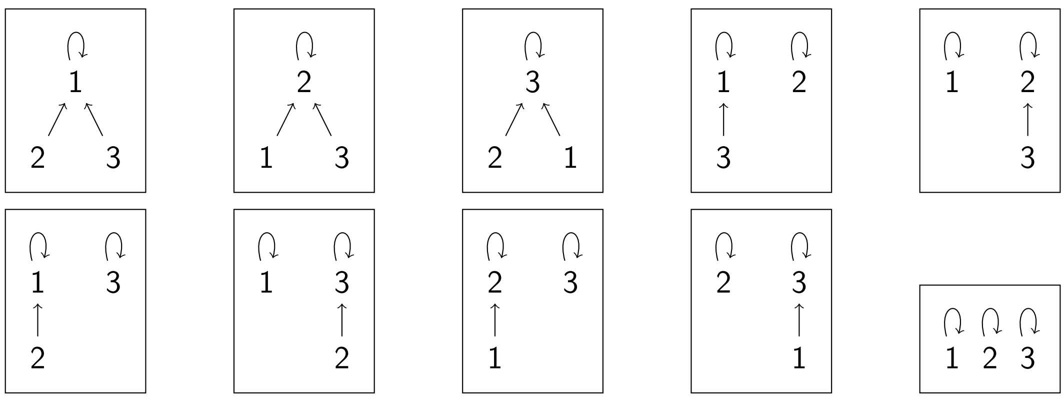
(d) Geef een bewijs voor de recursieve formule die je in onderdeel (c) hebt gebruikt.

Deze deelopgave kan wat meer tijd kosten. Daarom is dit het laatst gegeven onderdeel van dit tentamen.

De crux is om uit te zoeken welk gevalsonderscheid je moet gebruiken. Als je het verkeerde onderscheid maakt, dan kom je namelijk (mogelijk) uit op een andere formule. Als dit zo is, geef dan in plaats van de recursieve formule uit (c) de formule en die jij gevonden hebt, inclusief bewijs, voor hetzelfde aantal punten. Je krijgt echter niet meer dan 3 punten door meer dan één formule correct af te leiden.

Oplossing 5.

(a) De tien idempotente afbeeldingen zijn $\boxed{1}$



(b)
$$
\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0}(j+1)\frac{x^j}{j!} &= \sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!} + \sum_{j\geq 0} j\frac{x^j}{j!} \\
&= e^x + \sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{(j-1)!} \\
&= e^x + \sum_{k\geq 0}\frac{x^{k+1}}{k!} \\
&= e^x + xe^x = (1+x)e^x \qquad \boxed{1}
\end{aligned}
$$

Alternatief. Dit alternatief vind ik persoonlijk niet handig, maar er zijn een aantal studenten geweest die het zo hebben opgelost.

$$
(1+x)e^x = \left(\sum_{k\geq 0}(1)_k\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!}\right)
$$

convolutieformule

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\binom{n}{m}(1)_m\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{m\geq 0}^{1}\binom{n}{m}(1)_m \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

(c) $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$

$$F'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \boxed{1}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} a_{n-k}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(substitutie $n = m+1$)

$$= \sum_{m\geq 0}\sum_{k=1}^{m+1} k\binom{m}{k-1} a_{m+1-k}\frac{x^{m}}{m!}$$

(substitutie $j = k+1$)

$$= \sum_{m\geq 0}\sum_{j\geq 0} (j+1)\binom{m}{j} a_{m-j}\frac{x^{m}}{m!} \qquad \boxed{1}$$

(gebruik convoltutie formule van EGF's)

$$= \left(\sum_{p\geq 0}(p+1)\frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum_{q\geq 0} a_q\frac{x^q}{q!}\right) \qquad \boxed{1}$$

$$= (x+1)e^x F(x)$$

(d) We beschouwen idempotente functies $f\colon [n] \to [n]$. We maken gevalsonderscheid naar het aantal elementen in het volledig origineel van $f(n)$. Zeg dat zijn er k. Dus we bekijken f zodat $k = |f^{-1}(f(n))| = \#\{x \in [n] \mid f(x) = f(n)\}$. Als je f als een graaf ziet, dan zijn elementen in $f^{-1}(f(n))$ precies de punten in de samenhangscomponent van n. $\boxed{1}$ voor beschrijving van het gevalsonderscheid

Merk op dat al vast ligt dat $n \in f^{-1}(f(n))$, dus $1 \leq k \leq n$ en er zijn $\binom{n-1}{k-1}$ mogelijkheden om de overige $k-1$ elementen in $f^{-1}(f(n))$ te selecteren $\boxed{1}$.

Vervolgens zijn er k mogelijkheden om de waarden van $f(n)$ vast te leggen, het moet namelijk één van de k elementen uit $f^{-1}(f(n))$ zijn $\boxed{1}$.

Tot slot zijn er nog a_{n-k} manieren om f voort te zetten tot een idempotente functie op de $n-k$ elementen die niet in $f^{-1}(f(n))$ zitten. Sommeren over alle mogelijke k geeft nu de gevraagde formule.