Discrete Wiskunde (WB011) **18 Januari 2021**

Correctievoorschrift hertentamen

Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek is toegestaan. Dit tentamen duurt twee uur.

Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. In totaal zijn er 27 punten te verdienen.

Het cijfer dat je krijgt is 1 + 9 × aantal gehaalde punten / 27. Dit wordt afgerond op halve punten. Uitzondering zijn cijfers tussen de 5 en de 6: deze cijfers worden afgerond op hele punten. Kortom, je hebt een voldoende, dus een cijfer 6 of hoger, als je minstens $27/2$ *punten hebt gehaald.*

Opgave 1 (2 + 5 punten)**.** Een vast punt van een permutatie σ van $[n]$ is een $j \in [n]$ zo dat $\sigma(j) = j$.

(a) Hoeveel permutaties van [15] zijn er met 5 cykels, waarbij 15 een vast punt is? Druk je antwoord uit in termen van de Stirling getallen van de eerste soort (je hoeft het niet verder uit te rekenen).

(b) Hoeveel permutaties van [15] zijn er met 5 cykels, waarbij 15 het enige vaste punt is? Druk je antwoord uit in termen van de Stirling getallen van de eerste soort (je hoeft het niet verder uit te rekenen).

Oplossing 1.

(a) Een permutatie van [15] met 5 cykels en met 15 als vast punt is uniek vast te leggen door de elementen in [14] te permuteren met 4 cykels $\boxed{1}$. Dit kan op $c(14, 4) = |s(14, 4)| = s(14, 4)$ $\boxed{1}$ manieren (we kunnen de absoluut strepen weg laten want $4 + 14$ is even en dus het Stirling getal is dan positief).

(b) We bepalen dit laatste aantal met inclusie exclusie.

Zij $j \in [15]$ de eigenschap dat j een vast punt is van een permutatie van [15] $\boxed{1}$. Voor $J \subset [15]$ staat $N_{\geq}(J)$ voor permutaties van [15] met 5 cykels zodat $j \in J$ vaste punten zijn. Vergelijkbaar met onderdeel (a) vinden we dat $N_{\geq}(J) = s(15 - |J|, 5 - |J|)$ $\boxed{2}$ (absoluut strepen kunnen we weg laten).

Het gevraagde aantal is dus $N_{=}(\{15\})$. Met inclusie exclusie verkrijgen we

$$\begin{aligned} N_{=}(\{15\}) &= \sum_{\{15\} \subset J \subset [15]} (-1)^{15-|J|} N_{\geq}(J) \boxed{1} \\ &= \sum_{\{15\} \subset J \subset [15]} (-1)^{15-|J|} s(15 - |J|, 5 - |J|) \\ &= \binom{14}{0} s(14, 4) - \binom{14}{1} s(13, 3) + \binom{14}{2} s(12, 2) - \binom{14}{3} s(11, 1) \\ &= s(14, 4) - 14s(13, 3) + 91s(12, 2) - 364s(11, 1) \qquad \boxed{1}. \end{aligned}$$

Opgave 2 (4 + 4 punten)**.** We verdelen n appels over 4 kinderen en 10 volwassenen. Kinderen krijgen minimaal 1 appel, maar maximaal 3. De volwassenen krijgen een drievoud aan appels.

(a) Laat zien dat de OGF in compacte vorm voor dit telprobleem gegeven is door

$$\frac{x^4}{(1-x)^4(1-x^3)^6}.$$

(b) Reken uit op hoeveel manieren dit kan als er $n = 12$ appels zijn.

Oplossing 2.

(a) De OGF van één kind is

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 \boxed{1} &= x(1 + x + x^2) \\ &= x\frac{1-x^3}{1-x}\boxed{1}. \end{aligned}$$

Voor één volwassene is dit

$$1 + x^3 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^3}\boxed{1}.$$

Voor 4 kinderen en 10 volwassenen is dit dus

$$x^4\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^4\left(\frac{1}{1-x^3}\right)^{10} = \frac{x^4}{(1-x)^4(1-x^3)^6}\boxed{1}.$$

(b)
$$\begin{aligned} \left[\!\!\left[\frac{x^4}{(1-x)^4(1-x^3)^6}\right]\!\!\right]_{x^{12}} &= \left[\!\!\left[\frac{1}{(1-x)^4}\cdot\frac{1}{(1-x^3)^6}\right]\!\!\right]_{x^8} \boxed{1} \\ &= \left[\!\!\left[\sum_{i\geq 0}\left(\!\!\binom{4}{i}\!\!\right)x^i \cdot \sum_{j\geq 0}\left(\!\!\binom{6}{j}\!\!\right)x^{3j}\right]\!\!\right]_{x^8} \boxed{1} \\ &= \left(\!\!\binom{4}{8}\!\!\right)\left(\!\!\binom{6}{0}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{4}{5}\!\!\right)\left(\!\!\binom{6}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{4}{2}\!\!\right)\left(\!\!\binom{6}{2}\!\!\right) \boxed{2} \\ &= \binom{11}{8} + \binom{8}{5}\cdot 6 + \binom{5}{2}\binom{7}{2} \\ &= 165 + 56\cdot 6 + 10\cdot 21 = 711 \end{aligned}$$

Opgave 3 (5 punten)**.** Voor positieve gehele getallen n, p, q laat $A(n, p, q)$ het aantal manieren zijn om n identieke objecten te verdelen over hoogstens p identieke ontvangers, waarbij elke ontvanger hoogstens q objecten krijgt. Dan geldt er een recursie van de vorm

$$A(n, p, q) = A(n, p-1, q) + A(x, y, z),$$

voor zekere positieve gehele getallen x, y, z. Bepaal uitdrukkingen voor x, y, z in termen van n, p, q zodat deze recursie geldt. Geef ook een sluitend bewijs dat de uitdrukkingen die jij gevonden hebt correct zijn.

Oplossing 3. Het gevraagde aantal

$$A(x, y, z) = A(n, p, q) - A(n, p-1, q)$$

telt het aantal van deze partities van n, met delen van grootte hoogstens q, in precies p delen $\boxed{1}$ (want hoogstens p delen, maar niet in $p-1$ delen of minder). Haal nu van elk van deze p delen er 1 af $\boxed{1}$.
Dan krijgen we een partitie van $x = n - p$ $\boxed{1}$.
Er zijn nu hoogstens $y = p$ delen $\boxed{1}$ (het kunnen er minder worden, want delen die eerst 1 groot waren verdwijnen nu).
Omdat elk deel 1 kleiner is geworden hebben we delen die hoostens $z = q - 1$ groot zijn$\boxed{1}$.
Dus

$$A(n, p, q) = A(n, p-1, q) + A(n-p, p, q-1).$$

Dus

$$\begin{aligned} x &= n - p, \\ y &= p, \\ z &= q - 1. \end{aligned}$$

Opgave 4 (3 + 4 punten)**.** Zij $X = \{A \mid A \subseteq [7], |A| \in \{0, 3, 5, 7\}\}$. In woorden: X bevat de deelverzamelingen (gewone deelverzamelingen, dus niet multiset deelverzamelingen) van [7] die ofwel 0, ofwel 3, ofwel 5, ofwel 7 elementen bevatten. Zij $\mathbf{P} = (X, \subseteq)$ de partiële ordening van X met inclusie als relatie.

(a) Geef een antikettingpartitie (antichain cover) van X van minimale grootte. Bewijs dat er geen kleinere antikettingpartitie is.

(b) Zij μ de Möbiusfunctie van $\mathbf{P}$. Bereken $\mu(\emptyset, [7])$.

Oplossing 4.

(a) Een antikettingpartitie is $\{\{A \mid A \in X, |A| = i\} \mid i \in \{0, 3, 5, 7\}\}$ $\boxed{1}$.

Deze bevat 4 antikettingen. Dat aantal is minimaal omdat X een keten bevat van lengte 4, bijvoorbeeld

$$\{\emptyset, [3], [5], [7]\}, \boxed{1}$$

en elk element uit een keten moet in een verschillend deel in de antiketenpartitie zitten, omdat er anders twee vergelijkbare elementen bij elkaar zouden komen $\boxed{1}$.

(b)

$$\mu(\emptyset, \emptyset) = 1$$

Als $A \subset [7]$ met $|A| = 3$ dan is $\mu(\emptyset, A) = \mu(\emptyset, [3])$, en

$$\begin{aligned}\mu(\emptyset, [3]) &= -\sum_{B \in X, B \subsetneq [3]} \mu(\emptyset, B) \\ &= -\mu(\emptyset, \emptyset) = -1\end{aligned}$$

Als $A \subset [7]$ met $|A| = 5$ dan is $\mu(\emptyset, A) = \mu(\emptyset, [5])$, en

$$\begin{aligned}\mu(\emptyset, [5]) &= -\sum_{B \in X, B \subsetneq [5]} \mu(\emptyset, B) \\ &= -\sum_{B \subsetneq [5], |B|=0} \mu(\emptyset, B) - \sum_{B \subsetneq [5], |B|=3} \mu(\emptyset, B) \\ &= -\mu(\emptyset, \emptyset) - \binom{5}{3} \cdot \mu(\emptyset, [3]) = -1 + \binom{5}{3} = 9 && \boxed{1} \\ \mu(\emptyset, [7]) &= -\sum_{B \in X, B \subsetneq [7]} \mu(\emptyset, B) \\ &= -\sum_{B \subsetneq [7], |B|=0} \mu(\emptyset, B) - \sum_{B \subsetneq [7], |B|=3} \mu(\emptyset, B) - \sum_{B \subsetneq [7], |B|=5} \mu(\emptyset, B) && \boxed{1} \\ &= -\mu(\emptyset, \emptyset) - \binom{7}{3} \cdot \mu(\emptyset, [3]) - \binom{7}{5} \cdot \mu(\emptyset, [5]) && \boxed{1} \\ &= -1 - \binom{7}{3} \cdot -1 - \binom{7}{5} \cdot 9 = -155 && \boxed{1}\end{aligned}$$