Scoremodel bij het tentamen Discrete Wiskunde (WB011)

11-05-2021

Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek (David R. Mazur – *Combinatorics, A guided Tour*) is toegestaan.

Dit tentamen duurt twee uur. Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. In totaal zijn er 27 punten te verdienen.

Het cijfer dat je krijgt is $1 + 9 \times$ aantal gehaalde punten / 27. Vervolgens wordt de bonusregeling toegepast zoals uitgelegd op Brightspace. Het resultaat wordt daarna afgerond op halve punten. Uitzondering zijn resultaten tussen de 5 en de 6: deze worden afgerond op hele punten.

Opgave 1 (3 punten)**.** Zij $n, m \geq 1$. Bewijs: er zijn $P(n+m) - P(n)$ partities van het getal $n+m$ waarbij geen enkel deel gelijk is aan m.

Scoremodel 1. Als een partitie van $n+m$ minstens één deel m heeft $\boxed{1}$, dan vormen de overige n punten een partitie van n $\boxed{1}$, en daar zijn er $P(n)$ van. Het volgt (tellen van het complement) dat er $P(n+m) - P(n)$ partities zijn van $n+m$ zonder een deel m $\boxed{1}$.
Merk op dat we in het bovenstaande stilzwijgend uitgaan van een bijectieve correspondentie. We gaan na dat dit inderdaad zo is. Dit argument is zo flauw dat het je geen punten kost als je het niet geeft. Het weghalen van een deel m uit een partitie van $n+m$ met minstens één deel m is natuurlijk inverteerbaar: aan een alke partitie van n, kunnen we een deel m toevoegen, en zo verkrijgen we een partitie van $n+m$ met minstens één deel m.

Opgave 2 (5 punten). De rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ is recursief gegeven door

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 9, \\ a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) \qquad \text{als } n \geq 2. \end{aligned}$$

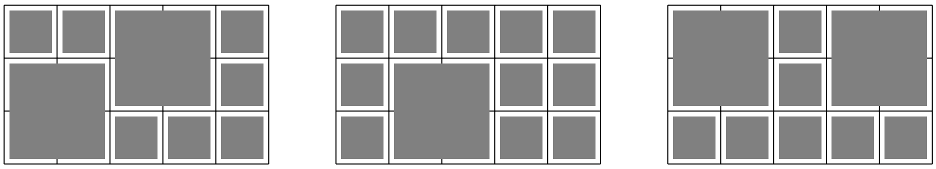
Leid een compacte vorm van de gewone voortbrengende functie (OGF) van de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ af.

Scoremodel 2 (5 punten).

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= 1 + 9x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n && \boxed{0.5} \\ &= 1 + 9x + \sum_{n\geq 2} \left(2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right)\right) x^n && \boxed{0.5} \\ &= 1 + 9x + 2x\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} + \sum_{n\geq 2} \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) x^n && \boxed{0.5} \\ &= 1 + 9x + 2x\sum_{n\geq 1} a_n x^n + 3x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 2} \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) x^n && \boxed{0.5} \\ &= 1 + 9x + 2x(A(x) - 1) + 3x^2 A(x) + \sum_{n\geq 2} \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) x^n && \boxed{1} \\ &= 1 + 9x + 2x(A(x) - 1) + 3x^2 A(x) - 1 - 7x + \sum_{n\geq 0} \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) x^n && \boxed{1} \\ &= 1 + 9x + 2x(A(x) - 1) + 3x^2 A(x) - 1 - 7x + \frac{1}{(1-x)^7} && \boxed{0.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x)(1 - 2x - 3x^2) &= \frac{1}{(1-x)^7} \\ A(x) &= \frac{1}{(1-x)^7(1-2x-3x^2)} && \boxed{0.5} \\ &= \frac{1}{(1-x)^7(1+x)(1-3x)} \end{aligned}$$

Opgave 3 (4 punten)**.** In deze opgave beschouwen we betegelingen van een $3 \times n$ rechthoek met een combinatie van vierkante tegels van 1×1 en van 2×2. Hieronder staan drie voorbeelden van zulke betegelingen bij $n = 5$.



Zij nu t_n het aantal van dit soort betegelingen. Leid een recursieve formule af voor t_n voor $n \geq 0$.

Scoremodel 3 (4 punten)**.** We onderscheiden twee gevallen in een betegeling van $3 \times n$. Kijk hiervoor naar de eerste kolom. $\boxed{1}$
Als er in de eerste kolom 3 tegels van 1×1 staan, dan is de betegeling rechts daarvan op t_{n-1} af te maken. $\boxed{1}$
Als er in de eerste kolom niet 3 tegels van 1×1 staan, dan moet er in de eerste twee kolommen een 2×2 tegel staan. De 2×2 tegel kan op 2 plekken liggen (namelijk onder en boven) $\boxed{0.5}$, en de betegeling rechts hiervan is op t_{n-2} af te maken $\boxed{0.5}$.
Dit geeft de recursie $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$ voor $n \geq 2$ $\boxed{0.5}$.
De beginwaarde $t_0 = 1$ komt overeen met de combinatorisch interpretatie, want er is 1 lege betegeling. Verder is $t_1 = 1$ omdat met één kolom er maar één betegeling is, namelijk met 3 tegels van 1×1 $\boxed{0.5}$. De complete recursieve formule is dus

$$t_n = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ t_{n-1} + 2t_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

Alternatief (een hele andere formule, maar ook een recursie!)
Als $n \geq 2$ dan zijn er twee opties: ofwel er is geen 2×2 tegel, ofwel er is er minimaal één $\boxed{0.5}$.
Stel nu dat er minimaal één is. We gaan tellen op hoeveel manieren dat kan door onderscheid te maken naar de positie van de meest rechtse 2×2 tegel. Stel de meeste rechtse ligt direct na kolom k $\boxed{1}$. De 2×2 tegel kan op twee manieren geplaatst worden $\boxed{0.5}$, rechts ervan liggen alleen 1×1 tegels, en links ervan, op de eerste k kolommen, kan op t_k manieren de betegeling worden afgemaakt $\boxed{1}$. We verkrijgen dus de recursie $t_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2t_k$ voor $n \geq 2$ $\boxed{0.5}$.
De beginwaarden zijn hetzelfde als boven $\boxed{0.5}$. Dus

$$t_n = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2t_k & n \geq 2 \end{cases}$$

Opgave 4 (5 punten)**.** Stel n en m zijn positieve gehele getallen. Hoeveel partities zijn er van de verzameling $\{1, 2, \dots, nm\}$ in n blokken die allemaal van grootte m zijn, waarbij geen van de 'standaard' blokken

$$\{1, 2, \dots, m\}, \quad \{m+1, 2, \dots, 2m\}, \quad \dots \quad , \{(n-1)m+1, (n-1)m+2, \dots, nm\}$$

voorkomt?

Er stond een fout (typo) in de opgave. Het tweede standaardblok moet zijn:

$$\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$$

Als je deze fout opmerkt, dan krijg je sowieso alle punten voor deze opgave!

Scoremodel 4 (5 punten)**.** Dit gaat met inclusie exclusie. Voor $k \in [n]$ beschouwen we de eigenschap dat het k-de standaardblok wél in zo een partitie zit $\boxed{1}$. Dan is $N_=(\emptyset)$ gevraagd. Voor een $J \subseteq [n]$ met $|J| = j$ staat $N_\geq(J)$ voor de het partities waarvan j standaardblokken al vast liggen, en waar de overgebleven $(n-j)m$ elementen dus nog over $n-j$ blokken van grootte m verdeeld moeten worden $\boxed{1}$. Uit Theorem 4.1.5 volgt

$$N_\geq(J) = \frac{((n-j)m)!}{(m!)^{n-j}(n-j)!}. \quad \boxed{1}$$

Dus

$$\begin{aligned} N_=(\emptyset) &= \sum_{J\subseteq[n]} N_\geq(J)(-1)^{|J|} && \boxed{1} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{((n-j)m)!}{(m!)^{n-j}(n-j)!}(-1)^j && \boxed{1} \end{aligned}$$

Er zijn equivalente uitdrukkingen doe goed gerekend worden, gebaseerd op

$$\frac{((n-j)m)!}{(m!)^{n-j}(n-j)!} = \frac{1}{(n-j)!}\binom{nm}{m, m, \dots, m} = \frac{1}{(n-j)!}\prod_{k=0}^{n-1-j}\binom{nm-mk}{m}.$$

Alternatief (eigenlijk hetzelfde, maar anders opgeschreven).
Het aantal partities van $[nm]$ in n blokken van grootte m is

$$\frac{(nm)!}{(m!)^n n!}. \qquad \boxed{2}$$

Eén punt minder als je vergeet te delen door $n!$, daarna "doorrekenfout" (geen verdere punten aftrek). Net zo, is het aantal partities van $[nm]$ in n blokken van grootte m, die j gegeven standaardblokken bevatten gelijk aan

$$\frac{(nm-jm)!}{(m!)^{n-j}(n-j)!}. \qquad \boxed{1}$$

Er zijn n standaardblokken, en daar kunnen op $\binom{n}{j}$ manieren er j uit gekozen worden $\boxed{1}$. Inclusie exclusie geeft daarom dat het gevraagde aantal gelijk is aan

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(nm-jm)!}{(m!)^{n-j}(n-j)!}(-1)^j. \qquad \boxed{1}$$

Opgave 5 (3 + 7 punten)**.**

(a) Zij $(X, \leq)$ een partiële ordening met bijbehorende zetafunctie ζ en Möbiusfunctie μ. Gebruik het feit dat μ een rechtsinverse is van ζ, dus dat $\zeta\mu = \delta$, om te bewijzen dat voor $x, y \in X$ met $x < y$ geldt dat

$$\mu(x, y) = -\sum_{x<z\leq y} \mu(z, y).$$

(b) Zij X de verzameling van partities van $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ die bestaan uit ofwel 1, ofwel 3, ofwel 4, ofwel 7 blokken. We maken hierbij de partiële ordening $\mathbf{X} = (X, \preceq)$ door de partities te ordenen met verfijning. $\mathbf{X}$ is dus een deel-partiële ordening van $\mathbf{\Pi}_7$ zoals beschreven in het boek. Ga met een berekening na dat

$$\mu\left(\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{7\}\},\ [7]\right) = -1450.$$

Scoremodel 5 (3 + 7 punten)**.**

(a) Als $x < y$, dan is natuurlijk ook $x \neq y$, en dus is $\delta(x, y) = 0$. Dus

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(x, y) && \boxed{1} \\ &= (\zeta\mu)(x, y) \\ &= \sum_{x\leq z\leq y} \zeta(x, z)\mu(z, y) && \boxed{0.5} \end{aligned}$$

Merk op dat $\zeta(x, z) = 1$ als $x \leq z$, dus

$$= \sum_{x\leq z\leq y} \mu(z, y) \qquad \boxed{0.5}$$

haal de term bij $z = x$ uit de som

$$\mu(x, y) = -\sum_{x<z\leq y} \mu(z, y) \qquad \boxed{1}$$

(b) Voor het gemak delen we de partities in naar het aantal blokken: $X = X_1 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_7$, waarbij X_k staat voor de partities van [7] bestaande uit k blokken. De X_k voor $k = 1, 3, 4, 7$ zijn de vier lagen die je ziet als je een Hassediagram van $\mathbf{X}$ tekent. $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} \mu(\{\{1\}, \dots, \{7\}\}, [7]) &= -\sum_{\{\{1\},\dots,\{7\}\}\prec z} \mu(z, [7]) \\ &= -\mu([7], [7]) - \sum_{z\in X_3} \mu(z, [7]) - \sum_{z\in X_4} \mu(z, [7]) && \boxed{1} \end{aligned}$$

Merk op dat $\mu(z, [7])$ constant is op de lagen uit het Hasse diagram. Dus kies een $x_3 \in X_3$ en $x_4 \in X_4$, dan is

$$= -1 - |X_3|\mu(x_3, [7]) - |X_4|\mu(x_4, [7]) \qquad \boxed{1}$$

Merk op dat $|X_k| = S(7,k)$, dus

$$= -1 - S(7,3)\mu(x_3,[7]) - S(7,4)\mu(x_4,[7]) \qquad \boxed{1}$$

We doen nu de deel berekeningen.

$$\begin{aligned}
\mu(x_3,[7]) &= -\sum_{x_3 \prec z} \mu(z,[7]) = -\mu([7],[7]) = -1 && \boxed{1}\\
\mu(x_4,[7]) &= -\sum_{x_4 \prec z} \mu(z,[7])\\
&= -\mu([7],[7]) - \sum_{x_3 \in X_3, x_4 \prec x_3} \mu(x_3,[7])\\
&= -1 + \#\{x_3 \in X_3, x_4 \prec x_3\} && \boxed{1}
\end{aligned}$$

Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ manieren om twee blokken uit een $x_4 \in X_4$ samen te voegen en zo een $x_3 \in X_3$ te krijgen, dus

$$\mu(x_4,[7]) = -1 + 6 = 5 \qquad \boxed{1}$$

Invullen geeft nu

$$\begin{aligned}
\mu(\{\{1\},\dots,\{7\}\},[7]) &= -1 + S(7,3) - 5S(7,4)\\
&= -1 + 301 - 5 \cdot 350 = -1450
\end{aligned}$$

Moelijk alternatief Schrijf $x_7 = \{\{1\},\dots,\{7\}\}$, $x_1 = [7]$. In plaats van de formule uit (a) kan je ook gebruiken

$$\begin{aligned}
\mu(x_7,x_1) &= -\sum_{z \prec x_1} \mu(x_7,z)\\
&= -\mu(x_7,x_7) - \sum_{z \in X_4} \mu(x_7,z) - \sum_{z \in X_3} \mu(x_7,z)\\
&= -1 + S(7,4) - \sum_{z \in X_3} \mu(x_7,z)
\end{aligned}$$

Het lastige is nu dat $\mu(x_7,z)$ niet constant is voor alle $z \in X_3$. Dus je moet verder gevalsonderscheid gaan maken naar de "vorm" van de partitie.