**Operations Research (WB094)** **14 januari 2021**

# Tentamen Operations Research (kans B)

*Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart de student zich te onthouden van het plegen van fraude. Indien de docent het vermoeden heeft dat er is gefraudeerd, zal er contact worden opgenomen met de student. Zo nodig zal de zaak worden doorverwezen naar de examencommissie.*

**Upload aan het begin van het tentamen de verklaring dat je alleen de toegelaten hulpmiddelen gaat gebruiken.**

**Vergeet niet je uitwerkingen vóór het uploaden met je naam te voorzien en duidelijk te nummeren zo dat het ingeleverde werk in een zinvolle volgorde gebracht kan worden.**

**Opgave 1.** *(9 punten)*
Gegeven is het LP-probleem

$$\text{maximaliseer } (5x_2+x_3+4x_4) \text{ voor } \begin{array}{rcl} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 & \leq & 4 \\ 3x_2 \qquad\quad + x_4 & = & 2 \\ -x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{array} \text{ met } x_1, x_2, x_4 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}.$$

(i) Bepaal *middels het Simplex algoritme* een optimale oplossing van dit LP-probleem.

(ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

(iii) Zijn de optimale oplossingen van het originele LP-probleem en van het duale probleem eenduidig?

Zo niet, geef ook een andere optimale oplossing, zo wel, leg uit waarom.

**Opgave 2.** *(7 punten)*
Gezocht is het *minimum* van $2|x-2|+3|y-3|$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x+2|+|y-1| \leq 5$.

(i) Laat zien dat het toegelaten gebied $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+2|+|y-1| \leq 5\}$ een polytoop is.

(ii) Formuleer het gegeven probleem als LP-probleem.

(iii) Vind een optimale oplossing van het gegeven probleem (niet per se middels het Simplex algoritme).

(iv) De optimale oplossing ligt niet in een extreem punt van $P$.

Leg uit waarom dit geen tegenspraak is met de stelling dat een LP-probleem een optimale oplossing heeft in een extreem punt van het toegelaten gebied.

**z.o.z. voor Opgave 3**

**Opgave 3.** *(6 punten)*
Voor de primale en duale problemen

$$\text{(P)}\ \max c^{tr}x \text{ voor } Ax \leq b, x \geq 0 \quad \text{en} \quad \text{(D)}\ \min b^{tr}y \text{ voor } A^{tr}y \geq c, y \geq 0$$

noteren we met $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ en $\mathcal{Q} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^{tr}y \geq c, y \geq 0\}$ de toegelaten gebieden van (P) en (D).

(i) Stel dat $\mathcal{P} \neq \emptyset$ en zij $e \in \mathbb{R}^n$ de vector met alle componenten gelijk aan $1$.

Laat zien dat $\mathcal{P}$ begrensd is dan en slechts dan als $e^{tr}x$ begrensd is op $\mathcal{P}$.

(ii) Stel dat minstens één van (P) en (D) toelaatbaar is, d.w.z. minstens één van $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ is niet leeg.

Bewijs dat in dit geval minstens één van $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ onbegrensd is.

Hint: Bekijk het hulpprobleem (P*) $\max e^{tr}x$ voor $Ax \leq b$, $x \geq 0$ en zijn duaal probleem.

**Succes ermee!**