

Tentamen Operations Research (kans B)

Opgave 1. (5 punten)

Gegeven is het LP-probleem

$$\begin{array}{rcl} & x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 & \leq 4 \\ \text{maximaliseer } (x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4) \text{ voor } & 2x_1 & + x_3 - 4x_4 \leq 2 \\ & -2x_1 + x_2 & + x_4 \leq 1 \end{array} \text{ en } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

- (i) Bepaal middels de simplex methode een optimale oplossing van dit LP-probleem.
Leg uit waarom deze optimale oplossing niet uniek is en geef een verdere optimale oplossing aan.
- (ii) Formuleer het duale probleem van het gegeven LP-probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing aan.
Beargumenteer waarom de optimale oplossing van het duale probleem wel uniek is.

Opgave 2. (6 punten)

Een *transportprobleem* draait typisch om de vraag, goederen van verschillende fabrieken naar verschillende klanten te vervoeren. We gaan uit van een enkele soort product. Stel we hebben m fabrieken en n klanten. Fabrik no. i heeft een maximale productiecapaciteit van A_i eenheden en klant no. j heeft een vraag van B_j eenheden. De transportkosten van fabriek no. i naar klant no. j zijn $c_{ij} \geq 0$ per eenheid.

Gezocht is nu een *verdelingsplan* met minimale kosten zodat iedere klant de juiste hoeveelheid producten krijgt en geen fabriek boven de capaciteitsgrens produceert. Zo'n verdelingsplan is gegeven door de hoeveelheid producten x_{ij} die van fabriek no. i naar klant no. j getransporteerd wordt.

- (i) Formuleer het vinden van een optimaal verdelingsplan als LP-probleem.
- (ii) Laat zien dat de randvoorwaarden van het probleem de noodzakelijke voorwaarde impliceren dat de totale productiecapaciteit $\sum_{i=1}^m A_i$ van alle fabrieken samen minstens even groot is als de totale vraag $\sum_{j=1}^n B_j$ van alle klanten samen.
- (iii) Laat zien dat er altijd een verdelingsplan bestaat als aan de noodzakelijke voorwaarde uit deel (ii) voldaan is.

Bewijs met behulp hiervan dat er voor het transportprobleem een optimaal verdelingsplan bestaat dan en slechts dan als aan de noodzakelijke voorwaarde $\sum_{i=1}^m A_i \geq \sum_{j=1}^n B_j$ voldaan is.

Hint: Om een toelaatbare oplossing te vinden, laat iedere fabriek producten volgens haar aandeel aan de totale productiecapaciteit van alle fabrieken samen naar iedere klant sturen.

- (iv) Formuleer het duale LP-probleem.

Leg uit waarom ook het duale LP-probleem een eindige optimale oplossing heeft.

z.o.z. voor Opgave 3

Opgave 3. (3 punten)

Een *project* is een verzameling I van deeltaken en een *projectplan* bestaat uit het vastleggen van de begintijdstippen van de deeltaken $i \in I$. Hierbij dient het volgende in acht te worden genomen:

- Iedere deeltaak $i \in I$ heeft een zekere looptijd $t_i \geq 0$.
- Voor iedere deeltaak i zijn er zekere deeltaken die voltooid moeten zijn voordat deeltaak i kan beginnen (de muren van een huis kunnen pas worden geschilderd nadat ze zijn gemetseld). De verzameling van deeltaken die voor i voltooid moeten zijn, noemen we V_i (denk aan *voorganger*).

De totale duur van het project is natuurlijk de tijd tussen de start van de eerste deeltaak en het einde van de laatste deeltaak en een optimaal projectplan minimaliseert de totale duur van het project.

Modelleer het vinden van een optimaal projectplan als een LP-probleem. Wat zijn de variabelen, wat is de doelfunctie en wat zijn de randvoorwaarden?

Succes ermee!