

Uitwerking

Herkansing IW 22-01-2021

1(b)

$$\frac{[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)]}{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C} \text{ rule 7 (2x)}$$

$$\frac{[A \vee B]}{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C \quad A \vee B} \text{ rule 1 (3x)}$$

$$\frac{C}{(A \vee B) \rightarrow C} \text{ rule 9}$$

$$\frac{((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)}{\text{rule 4, ophelpt in aanname 2}}$$

$$\frac{((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)}{\text{rule 4, ophelpt: aanname 1}}$$

2(a) $X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{2, 3, 4\}$ (2.24) insyllabus!!

$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (8 element)

$P(Y) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ (8 element)

$P(X \cup Y) = P(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (16 element)

(b) Neem stelling in 1(a) met $A := X \in P(X)$ of $X \subset X$
 $B := X \in P(Y)$ of $X \subset Y$ $C := X \in P(X \cup Y)$ of $X \subset X \cup Y$

dan is $A \rightarrow C : X \subset X \rightarrow X \subset X \cup Y$

en dat geldt wegens betekenis $X \cup Y := \cup \{X, Y\}$

Analogy: $B \rightarrow C : X \subset Y \rightarrow X \subset X \cup Y$

en is waar

2(b)
Vervolg

Met bovenstaande betekenissen van A, B, C geldt de
 $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

nu Modus ponens op 1(a): $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

geeft $A \vee B \rightarrow C$ oftewel:

$$(x \in X) \vee (x \in Y) \rightarrow (x \in X \cup Y)$$

$$\Leftrightarrow x \in P(X) \vee x \in P(Y) \rightarrow x \in P(X \cup Y)$$

nu geldt: $x \in W \vee x \in Z \Leftrightarrow x \in W \cup Z$

Zie bijv. ^{(2.17) of} (2.13) syllabus voor w.k. verz. $W \cup Z \Rightarrow$

$$x \in P(X) \vee P(Y) \rightarrow x \in P(X \cup Y)$$

$$\stackrel{\text{regel 11}}{\Rightarrow} \forall x (x \in P(X) \vee P(Y) \rightarrow x \in P(X \cup Y))$$

$$\text{ZF6} \Rightarrow P(X) \vee P(Y) \subset P(X \cup Y) \quad \text{QED}$$

3(a) Check de 3 eigenschappen van een partiële orden:

(1) Reflexief: $u R u$ (2) Transitief: $u R v \wedge v R w \rightarrow u R w$

(3) Antisymmetrisch: $u R v \wedge v R u \rightarrow u = v$

Hiervan is $R = \leq$ dus $[u R v \text{ is } u \leq v]$

$$\text{voor } u, v, w \in Z = \{Z \in P(X) \mid \exists x \in X (Z = D(x))\}$$

$$(1) \quad u R u \Leftrightarrow D(x) R D(x) \Leftrightarrow D(x) \subset D(x) \quad \text{want } X \subset X \text{ voor alle } x \in X$$

$$(2) \quad u R v \wedge v R w \text{ is } D(x) \subset D(y) \text{ en } (D(y) \subset D(z))$$

$$\rightarrow D(x) \subset D(z) \text{ want voor alle verzamelingen } A$$

3(a) Vervolg (3) $D(x) \subset D(y)$ & $D(y) \subset D(x) \rightarrow D(y) = D(x)$

hlopt wgg. (7-20) syllaba 1

(b) 1) $X \hookrightarrow D(x)$ bijectie.

injectief $D(x) = D(y) \leftrightarrow \forall z (z \leq x \leftrightarrow z \leq y)$

neem $z=x$: $\rightarrow x \leq y$. Neem $z=y$: $\rightarrow y \leq x$

$D(x) \leq$ is palre $\Rightarrow$ ant- $\leq$ $\Rightarrow \boxed{y=x}$

surjectief: $\forall z \in Z \exists! x \in X: z = D(x)$?

duidelijk dat alle $z \in Z$ z per def. van de $\leq$ is $D(x)$.

2) $D(x) \leq D(y)$ desda $x \leq y$ $\longleftrightarrow$

$D(x) \subset D(y)$ desda $x \leq y$ $\longleftrightarrow$

$\forall z \ z \in D(x) \rightarrow z \in D(y)$ $\dots \dots \dots \longleftrightarrow$

$\forall z (z \leq x \rightarrow z \leq y)$ desda $x \leq y$

Beis $\leftarrow$: $x \leq y$ en $z \leq x \rightarrow z \leq y$ wegens transitiviteit

Beis $\rightarrow$: neem $z=x$, dan hlopt $x \leq x$ wegs reflexiviteit

en dus $x \leq y$ (modus ponens) want $z \leq x \rightarrow z \leq y$

4. Beperk $\leq$ op X tot $\leq_X$

1) $\forall y \in Y \langle y, y \rangle \in R' = R \cap Y \times Y$ idw

$\langle y, y \rangle \in R$ en $\langle y, y \rangle \in Y \times Y$.

$\nearrow$ omdat R $\leq$ relatie $\nwarrow$ $\forall y \in Y \ z \in Y$

2) $\langle x, y \rangle \in R', \langle y, z \rangle \in R' \xrightarrow{?} \langle x, z \rangle \in R'$
 $\in R$ omdat $\langle x, y \rangle \in R$ en $\langle y, z \rangle \in R$ $\xrightarrow{d.}$ $\langle x, z \rangle \in R$ en $\langle x, z \rangle \in Y \times Y$
 en R is een relatie $\hookrightarrow$

$\hookrightarrow Y \times Y$ omdat $x, y, z \in Y \rightarrow \langle x, z \rangle \in Y \times Y$ (4)

3) $\langle x, y \rangle \in R' \xrightarrow{?} \langle y, x \rangle \in R'$

$\langle x, y \rangle \in Y \times Y \hookrightarrow x \in Y \wedge y \in Y \rightarrow \langle y, x \rangle \in Y \times Y$

$\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R$ want R is eq. relatie

(b) $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ alle $x_i \in Y$, $\text{bep. } n = 1$:

$S = X = \{x\}$ Deen is $x \sim x$ ($\sim$ is reflexief)

inductie op n , basis $n=1$, klopt want $[x] = \{x\}$

$S \cap X = \{x\}$ heeft idd 1 element.

Inductie op n : $X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\exists S' \subset Y$ s.d. $\forall y \in Y$ (dus $y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n$) $|[y] \cap S'| = 1$

(dit volgt vanwege onderdeel (a): $\forall x \in X$ "erft" $\sim$)

- gewalt onderscheid: 1) $x_{n+1} \sim y$ voor alle $y \in Y$

2) $x_{n+1} \not\sim y$.

1) $S = S'$ werkt: $[x_{n+1}] \subseteq [y]$ en dus $|[y] \cap S'| = 1$

2) $S = S' \cup \{x_{n+1}\}$ werkt, vanwege twee gevallen:
 - $x \neq x_{n+1}$ dus $x = y \in Y$ dan $[x] \cap S = [y] \cap S'$ dus $| \cdot | = 1$

- $x = x_{n+1} \rightarrow [x_{n+1}] \cap S = \{x_{n+1}\} \cap S \cap \{x_{n+1}\} = \{x_{n+1}\}$

$$5) (a) i(u) = [u, 0]_{\mathbb{Z}}$$

(5.44)

$$i(u) + i(w) = [u, 0] + [w, 0] \xrightarrow{\downarrow} [u+w, 0]$$

$$= i(u+w) \quad (5.58)$$

$$(b) j(k) + j(l) = [k, 1] + [l, 1] \xrightarrow{\downarrow} [k+l, 1] = j(k+l)$$

