

Hertentamen

Geef bij elke opgave een bewijs en/of berekening. Je mag daarbij verwijzen naar resultaten uit het boek of naar het formuleblad. Gebruik van een niet grafische rekenmachine is toegestaan. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Er zijn $26!$ verschillende strings waarin elk van de 26 letters van het alfabet precies één keer voorkomt. Voor hoeveel van die strings geldt dat daarin geen van de volgende drie deelstrings voorkomt: sep, bram, bernd?

Opgave 2 (3 punten). $P(n, k)$ is het aantal partities van een positief geheel getal n in k delen, $P(n)$ is het aantal partities van het getal n in een willekeurig aantal delen.

Bepaal alle positieve gehele getallen k en n waarvoor geldt dat $P(n, k) = P(n - k)$.

Opgave 3 (6 punten). Voor positieve gehele getallen n zijn de getallen $a(n)$ gedefinieerd als het aantal functies $\varphi: [n] \rightarrow \mathbb{Z}$ waarvoor geldt dat $\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(j) : j \in [n]\} = [k]$ voor een zekere positieve gehele k . Verder wordt afgesproken dat $a(0) = 1$.

(a) Bewijs dat $a(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)k!$.

(b) Zij $k \geq 0$ vast. Definieer $b_k(n) = S(n, k)k!$ voor $n \geq 0$.
Bewijs dat $(e^x - 1)^k$ de EGF is van $b_k(n)$.

(c) Bewijs dat $\frac{1}{2 - e^x}$ de EGF is van $a(n)$.

Opgave 4 (4 punten). Zij G een graaf met het volgende chromatische polynoom

$$p(G, k) = k(k^2 - 3k + 3)(k - 1)^{37}.$$

Bewijs dat er een lijn e in G is zodat $G - e$ een boom is.

Opgave 5 (4 punten). $Z_{S_n}(z_1, \dots, z_n)$ is de cykelindex van de symmetrische groep S_n met zijn natuurlijke werking op n punten.

(a) Bewijs dat $Z_{S_n}(2, 2, \dots, 2) = n + 1$.

(b) Bewijs dat $Z_{S_n}(3, 3, \dots, 3) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.

Opgave 6 (5 punten).

(a) Beschrijf alle mogelijke $(b; v; r; 2; 1)$ -designs.

(b) Voor een design D heeft het complementaire design D^c als blokken de complementen van de blokken van D .

Bewijs dat het complementaire design D^c van een $(b; v; r; k; \lambda)$ -design D inderdaad een design is. Bepaal ook de parameters van D^c in termen van de parameters D .