Tentamen Groepen en Representaties (kans A)

Opgave 1.
Zij G een eindige abelse groep.

(i) Stel n is het maximum van de ordes van de elementen van G.
Laat zien dat G door elementen van orde n voortgebracht wordt.

(ii) Stel dat G voor iedere deler d van $|G|$ hoogstens d elementen van orde d bevat.
Bewijs dat G cyklisch is.

Oplossing:

(i) G is isomorf met $\mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_k}$ waarbij $d_i \mid d_{i+1}$ en $d_k = n$. Stel nu de i-de component is voortgebracht door $g_i \in G$ van orde d_i. Dan is G voortgebracht door $g_1, \ldots, g_k$, maar ook door $g_1 g_k, \ldots, g_{k-1} g_k, g_k$ en ieder van deze elementen heeft orde $d_k = n$.

(ii) Als G niet cyklisch is bevat G een ondergroep isomorf met $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ voor een priemgetal p. Dan is p een deler van $|G|$, maar G bevat minstens $p^2 - 1 > p$ elementen van orde p.

Opgave 2.
Zij G een eindige groep en $H \leq G$ een ondergroep. We noteren met $n_p(G)$ het aantal Sylow p-ondergroepen van G.

(i) Stel P is een Sylow p-ondergroep van H.
Laat zien dat $P = H \cap Q$ voor een Sylow p-ondergroep Q van G.

(ii) Bewijs dat $n_p(H) \leq n_p(G)$ voor alle priemgetallen p.

(iii) Ga voor $G = S_4$ en $H = A_4$ en voor $p = 2$ en $p = 3$ na of $n_p(H) < n_p(G)$ of $n_p(H) = n_p(G)$.

Oplossing:

(i) Omdat P een p-groep is, ligt P in een Sylow p-ondergroep Q van G en dan is $P \subseteq H \cap Q$. Maar P is een Sylow p-ondergroep van H en $H \cap Q$ is een p-groep in H, daarom is $|P| \geq |H \cap Q|$.

(ii) Als Q over alle Sylow p-ondergroepen van G loopt, komen volgens deel (i) alle Sylow p-ondergroepen van H als doorsneden $H \cap Q$ voor, daarom is $n_p(H) \leq n_p(G)$.

(iii) In S_4 is $\langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \cong D_4$ een Sylow 2-ondergroep, deze is niet normaal en we hebben $n_2(S_4) = 3$.

In A_4 is $\langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle \cong V_4$ normaal, daarom is $n_2(A_4) = 1 < n_2(S_4)$.

In S_4 is $\langle (1,2,3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ een Sylow 3-ondergroep die niet normaal is. Wegens $n_3(S_4) \mid 8$ en $n_3(S_4) \equiv 1 \bmod 3$ is $n_3(S_4) = 4$.

Omdat de Sylow 3-ondergroepen van S_3 alleen 3-cykels bevatten, liggen ze al in A_4, daarom is $n_3(A_4) = n_3(S_4) = 4$.

Opgave 3.

(i) Zij $N \trianglelefteq G$ een normaaldeler met $N \leq Z(G)$ en stel dat de factorgroep G/N cyklisch is.

Laat zien dat in dit geval G abels is.

Ga ook na dat deze conclusie niet noodzakelijk geldt als we in plaats van $N \leq Z(G)$ alleen veronderstellen dat N abels is.

(ii) Neem aan dat G nilpotent is en stel dat de commutatorfactorgroep $G/[G, G]$ cyklisch is.

Bewijs dat G abels is, d.w.z. dat $[G, G] = \{e\}$.

Oplossing:

(i) Omdat G/N cyklisch is, is G/N voortgebracht door xN voor een geschikte $x \in G$. Dan laat zich ieder $g \in G$ schrijven als $g = x^i z$ met $z \in N \leq Z(G)$ en hieruit volgt dat G abels is, want $x^i z \cdot x^j z' = x^{i+j} z z' = x^j z' \cdot x^i z$.

In S_3 is $N = \langle(1, 2, 3)\rangle$ een abelse (zelfs cyklische) normaaldeler en $G/N \cong \mathbb{Z}_2$ is cyklisch, maar S_3 is niet abels.

(ii) Stel dat G niet abels is, dan is de nilpotentie klasse van G minstens 2. In de dalende centraalrij ligt $\gamma_2(G)/\gamma_3(G) = [G, G]/\gamma_3(G)$ in het centrum van $G/\gamma_3(G)$. Volgens deel (i) is dan $G/\gamma_3(G)$ abels, maar dan zou $[G, G] \leq \gamma_3(G)$ zijn en dit is een tegenspraak omdat $\gamma_3(G)$ een echte ondergroep is van $\gamma_2(G) = [G, G]$.

Alternatief laat zich dit op een meer structurele manier aantonen: Een nilpotente groep is het directe product van zijn Sylow ondergroepen en de commutatorondergroep $[G, G]$ is het directe product van de commutatorondergroepen van de Sylow ondergroepen. Als $G/[G, G]$ cyklisch is, geldt dit ook in ieder van de Sylow ondergroepen, maar in een p-groep ligt $[G, G]$ in de Frattini ondergroep, dus is ieder van de Sylow ondergroepen cyklisch en dus ook G.

Opgave 4.

Zij G een eindige groep en V een irreducibele $\mathbb{C}G$-module.

(i) Stel dat $a \in Z(\mathbb{C}G)$ in het centrum van $\mathbb{C}G$ ligt.

Laat zien dat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat zo dat $av = \lambda v$ voor alle $v \in V$.

(ii) Bewijs dat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat met $(\sum_{g \in G} g)v = \lambda v$ voor alle $v \in V$.

(iii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de uitspraak in deel (ii) in het algemeen niet waar is als V niet irreducibel is.

Oplossing:

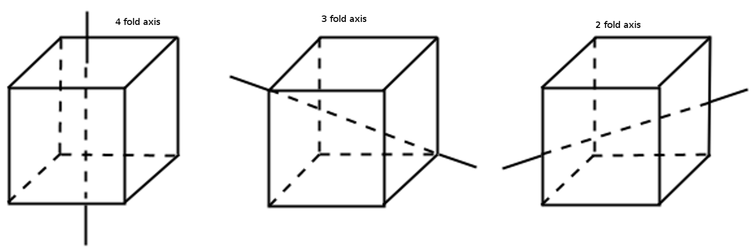
(i) Wegens $a \in Z(\mathbb{C}G)$ is $ag = ga$ voor alle $g \in G$. Dit betekent dat de afbeelding $\varphi : V \to V,\ v \mapsto av$ een G-module homomorfisme is, want $\varphi(gv) = agv = gav = g\varphi(v)$. Maar volgens het lemma van Schur is dan $\varphi = \lambda \cdot id_V$ voor een scalair $\lambda \in \mathbb{C}$ en dan is $av = \lambda v$ voor alle $v \in V$.

(ii) Wegens $x(\sum_{g \in G} g) = \sum_{g \in G} xg = \sum_{g' \in G} g' = \sum_{g \in G} gx = (\sum_{g \in G} g)x$ geldt $\sum_{g \in G} g \in Z(\mathbb{C}G)$, dus volgt de uitspraak rechtstreeks uit deel (i).

(iii) Neem $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ en de 2-dimensionale $\mathbb{C}G$-module met representatie $\Delta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (met betrekking tot een basis $\{v_1, v_2\}$). Dan is $\Delta(e+g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en dus $(e+g)v_1 = 2v_1$ en $(e+g)v_2 = 0$.

Net zo goed werkt de reguliere representatie voor een willekeurige eindige groep, dan is $\Delta(\sum_{g \in G} g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ en de basisvectoren zijn niet eens eigenvectoren.

Opgave 5.
De rotatiegroep $\mathcal{O}$ van een kubus is isomorf met S_4 en bevat rotaties van orde 4 door middelpunten van tegenoverliggende zijvlakken, van orde 3 door tegenoverliggende hoekpunten en van orde 2 door middelpunten van tegenoverliggende zijden.



Noem representanten van deze typen van rotaties r_4, r_3 en r_2, dan zijn 1, r_4^2, r_3, r_2, r_4 representanten van de conjugatieklassen van $\mathcal{O}$ en de karaktertabel is

$\lvert C_i \rvert$	1	3	8	6	6
g_i	1	r_4^2	r_3	r_2	r_4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

(i) Een kubus is een object in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, daarom geeft de werking van $\mathcal{O}$ op de kubus rechtstreeks een 3-dimensionale representatie van $\mathcal{O}$.

Wat is het karakter van deze representatie? (Licht je antwoord toe.)

(ii) De werking van $\mathcal{O}$ op de zijvlakken van de kubus geeft een permutatierepresentatie van graad 6 van $\mathcal{O}$.

Bepaal het karakter van deze permutatierepresentatie en ontbind dit karakter in een som van irreducibele karakters.

(iii) De irreducibele karakters χ_4 en χ_5 hebben hetzelfde tensor kwadraat

$\chi_4^2 = \chi_5^2 : \quad 9 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ (karakterwaarden in dezelfde volgorde als in de karaktertabel).

Splits χ_4^2 op in het symmetrische deel $\chi_4^{[2]}$ en het anti-symmetrische deel $\chi_4^{[1,1]}$ en ontbind $\chi_4^{[2]}$ en $\chi_4^{[1,1]}$ in een som van irreducibele karakters.

Oplossing:

(i) Met betrekking tot een standaard (rechtshandig) coördinaatstelsel (x-as naar rechts, y-as naar achter, z-as naar boven) hebben de rotaties r_4, r_3, r_2 de matrices

$$\Delta(r_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta(r_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta(r_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

het karakter van Δ is dus

$$\chi: \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1$$

en dit is juist χ_5.

(ii) De waarden van een permutatiekarakter zijn juist het aantal vaste punten van de operaties, bij de werking op de zijvlakken geeft dit het karakter

$$\pi: \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 2$$

en door inproducten met de irreducibele karakters te nemen ziet men dat $\pi = \chi_1 + \chi_3 + \chi_5$.

(iii) Er geldt $\chi_4^{[2]}(g) = \frac{1}{2}(\chi_4(g)^2 + \chi_4(g^2))$ en natuurlijk $\chi_4^{[1,1]} = \chi_4^2 - \chi_4^{[2]}$, hiermee gaat men snel na dat

$$\chi_4^{[2]}: \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \text{en} \quad \chi_4^{[1,1]}: \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1$$

dus is $\chi_4^{[1,1]} = \chi_5$ en $\chi_4^{[2]} = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4$.

Opgave 6.
Zij G een eindige groep, $H \leq G$ een ondergroep en zij χ een irreducibel karakter van G over $\mathbb{C}$.

(i) Laat zien dat $\chi(1) \leq [G:H]\,\varphi(1)$ voor een irreducibel karakter φ van H.

(ii) Stel H is een abelse ondergroep van G.

Bewijs dat in dit geval geldt dat $\chi(1) \leq [G:H]$.

(iii) Vind met behulp van deel (ii) afschattingen voor de maximale karaktergraden van de groepen A_4, S_4 en de diëdergroepen D_n.

Kan je deze afschattingen op een andere manier nog verbeteren?

Oplossing:

(i) Zij φ een irreducibele karakter van H met $(\varphi, \chi_{|H})_H > 0$, dan is $(\varphi^G, \chi) > 0$ volgens Frobenius reciprociteit en omdat χ irreducibel is, is dan $\chi(1) \leq \varphi^G(1) = [G:H]\,\varphi(1)$.

(ii) De irreducibele karakters van een abelse groep hebben graad 1, dus volgt de bewering uit deel (i) wegens $\varphi(1) = 1$.

(iii) Omdat de som van de kwadraten van de karaktergraden gelijk is aan de groepsorde, geldt sowieso $\chi(1) < \sqrt{|G|}$.

In A_4 is V_4 een ondergroep van index 3 en A_4 heeft inderdaad een irreducibele karakter van graad 3, dus is de afschatting in dit geval scherp.

In S_4 zijn de grootste abelse ondergroepen isomorf met $\mathbb{Z}_4$ of V_4 (en hebben dus index 6), want abelse ondergroepen van orde 6 zouden cyklisch zijn en S_4 heeft geen elementen van orde 6, ondergroepen van orde 8 zijn Sylow 2-ondergroepen en die zijn isomorf met D_4, en de enige normaaldeler van index 2 is A_4. Maar wegens $5^2 = 25 > |G|$ is de maximale graad van een irreducibel karakter in dit geval 4, en dit is natuurlijk beter dan de uit deel (ii) verkregen afschatting $\chi(1) \leq 6$.

In D_n zit een cyklische ondergroep van index 2, en omdat D_n niet abels is, is $\chi(1) \leq 2$ natuurlijk een optimale afschatting.