Tentamen Groepen en Representaties (kans A)

Opgave 1.
Zij G een eindige abelse groep.

(i) Stel n is het maximum van de ordes van de elementen van G.

Laat zien dat G door elementen van orde n voortgebracht wordt.

(ii) Stel dat G voor iedere deler d van $|G|$ hoogstens d elementen van orde d bevat.

Bewijs dat G cyklisch is.

Opgave 2.
Zij G een eindige groep en $H \leq G$ een ondergroep. We noteren met $n_p(G)$ het aantal Sylow p-ondergroepen van G.

(i) Stel P is een Sylow p-ondergroep van H.

Laat zien dat $P = H \cap Q$ voor een Sylow p-ondergroep Q van G.

(ii) Bewijs dat $n_p(H) \leq n_p(G)$ voor alle priemgetallen p.

(iii) Ga voor $G = S_4$ en $H = A_4$ en voor $p = 2$ en $p = 3$ na of $n_p(H) < n_p(G)$ of $n_p(H) = n_p(G)$.

Opgave 3.

(i) Zij $N \trianglelefteq G$ een normaaldeler met $N \leq Z(G)$ en stel dat de factorgroep G/N cyklisch is.

Laat zien dat in dit geval G abels is.

Ga ook na dat deze conclusie niet noodzakelijk geldt als we in plaats van $N \leq Z(G)$ alleen veronderstellen dat N abels is.

(ii) Neem aan dat G nilpotent is en stel dat de commutatorfactorgroep $G/[G, G]$ cyklisch is.

Bewijs dat G abels is, d.w.z. dat $[G, G] = \{e\}$.

Opgave 4.
Zij G een eindige groep en V een irreducibele $\mathbb{C}G$-module.

(i) Stel dat $a \in Z(\mathbb{C}G)$ in het centrum van $\mathbb{C}G$ ligt.

Laat zien dat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat zo dat $av = \lambda v$ voor alle $v \in V$.

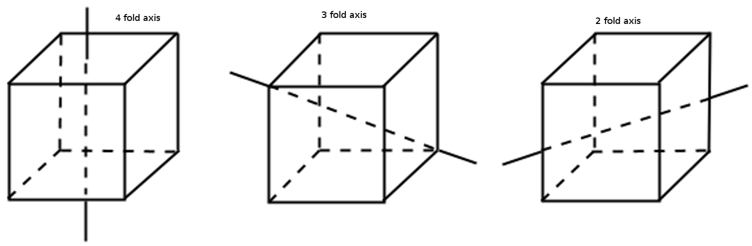
(ii) Bewijs dat er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat met $(\sum_{g \in G} g)v = \lambda v$ voor alle $v \in V$.

(iii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de uitspraak in deel (ii) in het algemeen niet waar is als V niet irreducibel is.

z.o.z. voor Opgaven 5 t/m 6

Opgave 5.

De rotatiegroep $\mathcal{O}$ van een kubus is isomorf met S_4 en bevat rotaties van orde 4 door middelpunten van tegenoverliggende zijvlakken, van orde 3 door tegenoverliggende hoekpunten en van orde 2 door middelpunten van tegenoverliggende zijden.



Noem representanten van deze typen van rotaties r_4, r_3 en r_2, dan zijn 1, r_4^2, r_3, r_2, r_4 representanten van de conjugatieklassen van $\mathcal{O}$ en de karaktertabel is

$\lvert C_i\rvert$	1	3	8	6	6
g_i	1	r_4^2	r_3	r_2	r_4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

(i) Een kubus is een object in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, daarom geeft de werking van $\mathcal{O}$ op de kubus rechtstreeks een 3-dimensionale representatie van $\mathcal{O}$.

Wat is het karakter van deze representatie? (Licht je antwoord toe.)

(ii) De werking van $\mathcal{O}$ op de zijvlakken van de kubus geeft een permutatierepresentatie van graad 6 van $\mathcal{O}$.

Bepaal het karakter van deze permutatierepresentatie en ontbind dit karakter in een som van irreducibele karakters.

(iii) De irreducibele karakters χ_4 en χ_5 hebben hetzelfde tensor kwadraat

$\chi_4^2 = \chi_5^2 : \quad 9 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ (karakterwaarden in dezelfde volgorde als in de karaktertabel).

Splits χ_4^2 op in het symmetrische deel $\chi_4^{[2]}$ en het anti-symmetrische deel $\chi_4^{[1,1]}$ en ontbind $\chi_4^{[2]}$ en $\chi_4^{[1,1]}$ in een som van irreducibele karakters.

Opgave 6.

Zij G een eindige groep, $H \leq G$ een ondergroep en zij χ een irreducibel karakter van G over $\mathbb{C}$.

(i) Laat zien dat $\chi(1) \leq [G:H]\,\varphi(1)$ voor een irreducibel karakter φ van H.

(ii) Stel H is een abelse ondergroep van G.

Bewijs dat in dit geval geldt dat $\chi(1) \leq [G:H]$.

(iii) Vind met behulp van deel (ii) afschattingen voor de maximale karaktergraden van de groepen A_4, S_4 en de diëdergroepen D_n.

Kan je deze afschattingen op een andere manier nog verbeteren?

Succes ermee!