Tentamen Groepen en Representaties (kans A)

Volle punten bij opgaven 1 t/m 7 leveren het cijfer 10 op, met de bonusopgave 8 kunnen extra punten verdiend worden.

Opgave 1.
Bepaal, tot op isomorfie na, alle abelse groepen van orde 500.
Welke van deze groepen bevatten een element van orde ≥ 100?
Welke van deze groepen bevatten een element van orde gelijk aan 100?

Oplossing: Er geldt $500 = 2^2 \cdot 5^3$. De Sylow 2-ondergroep van een abelse groep van orde 500 is dus isomorf met C_4 of $C_2 \times C_2$, de Sylow 5-ondergroep is isomorf met C_{125}, $C_5 \times C_{25}$ of $C_5 \times C_5 \times C_5$. Dit geeft de volgende zes mogelijke isomorfietypen:

- $C_4 \times C_{125} \cong C_{500}$;
- $C_4 \times C_5 \times C_{25} \cong C_5 \times C_{100}$;
- $C_4 \times C_5 \times C_5 \times C_5 \cong C_5 \times C_5 \times C_{20}$;
- $C_2 \times C_2 \times C_{125} \cong C_2 \times C_{250}$;
- $C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_{25} \cong C_{10} \times C_{50}$;
- $C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_5 \times C_5 \cong C_5 \times C_{10} \times C_{10}$.

Voor een abelse groep van de vorm $C_{d_1} \times \ldots \times C_{d_r}$ met $d_i \mid d_{i+1}$ is d_r de maximale orde van een element en ook de grootste gemene deler van de elementordes. Van de boven aangegeven groepen bevatten dus alleen C_{500}, $C_5 \times C_{100}$ en $C_2 \times C_{250}$ een element van orde ≥ 100, de eerste twee bevatten een element van orde gelijk aan 100, de derde niet.

Opgave 2.
Zij p een priemgetal en zij S_p de symmetrische groep van graad p.

(i) Bewijs dat S_p precies $(p-2)!$ ondergroepen van orde p bevat en dat al deze ondergroepen in S_p geconjugeerd zijn.

(ii) Zij $H \leq S_p$ een ondergroep van orde p. Bepaal de orde van de normalisator $N_{S_p}(H) = \{g \in S_p \mid gHg^{-1} = H\}$ van H in S_p.

Oplossing:

(i) Wegens $|S_p| = p!$ is een ondergroep van orde p een Sylow p-ondergroep van S_p, want p is geen deler van $(p-1)!$. Volgens de Sylow stellingen bestaan er dus ondergroepen $H \leq S_p$ van orde p en zijn al deze groepen geconjugeerd in S_p.

En ondergroep van orde p in S_p wordt door een p-cykel voortgebracht. Er zijn $p!$ manieren om de getallen $1, 2, \ldots, p$ in een p-cykel te schrijven, maar dit geeft slechts $(p-1)!$ verschillende elementen van orde p in S_p, omdat cyklisch doorschuiven dezelfde permutatie oplevert. Een cyklische groep van orde p heeft $p-1$ voortbrengers, dus brengen de $(p-1)!$ verschillende elementen van orde p precies $(p-2)!$ verschillende ondergroepen van orde p voort.

(ii) De $(p-2)!$ ondergroepen van orde p liggen in één baan onder S_p, de normalisator $N_{S_p}(H)$ is de stabilisator van H bij deze werking, on omdat de lengte van de baan gelijk is aan de index van de stabilisator heeft $N_{S_p}(H)$ orde $p!/(p-2)! = p(p-1)$.

Opgave 3.
Zij G een groep en laten $N, K \trianglelefteq G$ oplosbare normaaldelers zijn van G.

(i) Laat zien dat $NK = \{nk \mid n \in N, k \in K\}$ een oplosbare normaaldeler is van G.

(ii) Bewijs dat een eindige groep G een eenduidige maximale oplosbare normaaldeler heeft.

Oplossing:

(i) We weten dat NK een normaaldeler is van G. Verder is $NK/K \cong N/(N \cap K)$ en met N is ook de factorgroep $N/(N \cap K)$ oplosbaar en dus is NK/K oplosbaar. Omdat ook K oplosbaar is volgt hieruit dat NK oplosbaar is.

(ii) Zij $N \trianglelefteq G$ een oplosbare normaaldeler van G van maximale orde. Voor een willekeurige oplosbare normaaldeler K van G is dan volgens deel (i) ook NK een oplosbare normaaldeler van G, maar uit $N \leq NK$ en de aanname dat N maximale orde heeft, volgt $NK = N$. Hieruit volgt $K \leq N$.

Opgave 4.
Laten Δ_1 en Δ_2 representaties van graad n over $\mathbb{C}$ zijn van een eindige groep G. Neem aan dat er voor iedere $g \in G$ een inverteerbare matrix X_g bestaat zo dat $\Delta_2(g) = X_g^{-1}\Delta_1(g)X_g$.
Bewijs dat Δ_1 en Δ_2 equivalente representaties van G zijn, d.w.z. dat er een inverteerbare matrix T bestaat zo dat $\Delta_2(g) = T^{-1}\Delta_1(g)T$ voor alle $g \in G$.

Oplossing: Laten χ_1 en χ_2 de karakters zijn van Δ_1 en Δ_2. Omdat conjugatie het spoor van een matrix niet verandert, volgt uit $\Delta_2(g) = X_g^{-1}\Delta_1(g)X_g$ dat $\chi_2(g) = \chi_1(g)$, dus zijn de karakters van Δ_1 en Δ_2 gelijk en dus zijn de representaties equivalent. Hieruit volgt, dat er een conjugerende matrix T bestaat.

Opgave 5.
Zij $D_4 = \langle r, s\rangle$ de diëdergroep van orde 8, voortgebracht door een rotatie r van orde 4 en een spiegeling s. Volgens de stelling van Wedderburn is $\mathbb{C}D_4 \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2\times 2}$ omdat D_4 over $\mathbb{C}$ vier irreducibele representaties van graad 1 en één van graad 2 heeft.

(i) Geef een basis van het centrum van $\mathbb{C}D_4$ aan.

(ii) Laat zien dat $e = \frac{1}{2}(1 - r^2)$ de centrale primitieve idempotent is die bij de 2-dimensionale irreducibele representatie behoort, d.w.z. zo dat $\mathbb{C}D_4\, e \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Oplossing:

(i) De klassensommen vormen een basis van het centrum, deze zijn 1, r^2, $r + r^3$, $s + sr^2$, $sr + sr^3$.

(ii) Het is duidelijk dat e een idempotent is en dat e in het centrum van $\mathbb{C}D_4$ ligt. Om te laten zien dat e bij de 2-dimensionale representatie behoort, zijn er verschillende mogelijkheden:

- We weten dat voor een 1-dimensionale representatie δ geldt dat $e_\delta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta(g^{-1})g$ de bijhorende centrale primitieve idempotent is. Door de idempotenten e_1, e_2, e_3, e_4 voor de vier 1-dimensionale representaties van D_4 uit te schrijven, vinden we dat $e = 1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = \frac{1}{2}(1 - r^2)$.
- Door e met de elementen van D_4 te vermenigvuldigen, vinden we een basis $1 - r^2$, $r - r^3$, $s - sr^2$, $sr - sr^3$ van $\mathbb{C}D_4\, e$. Omdat $\mathbb{C}D_4\, e$ dimensie 4 heeft, geldt dus $\mathbb{C}D_4\, e \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ of $\mathbb{C}D_4\, e \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C}^{2\times 2}$. Maar in het eerste geval zou $\mathbb{C}D_4\, e$ de triviale module bevatten, en die is opgespannen door $1+r+r^2+r^3+s+sr+sr^2+sr^3$. Aan de basis van $\mathbb{C}D_4\, e$ leest men af dat dit niet zo is, dus geldt $\mathbb{C}D_4\, e \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Opgave 6.
Zij p een priemgetal en zij G een groep van orde p^4.

(i) Laat zien dat de graad van een irreducibele representatie van G over $\mathbb{C}$ alleen maar 1 of p kan zijn.

(ii) Bepaal de mogelijkheden voor het aantal irreducibele representaties van G over $\mathbb{C}$.

Oplossing:

(i) De karaktergraden zijn delers van $|G|$ en de som der kwadraten van de karaktergraden is $|G|$. De enige delers van p^4 zijn p^k voor $0 \leq k \leq 4$, maar omdat de triviale karakter (van graad 1) altijd bestaat, kan geen irreducibele karakter graad p^2 of groter hebben.

(ii) De commutatorondergroep G' van G heeft index p, p^2, p^3 of p^4 in G. Het geval $[G : G'] = p$ is onmogelijk, want dan zou G' al de Frattinigroep van G zijn en G cyclisch.

In het geval $[G : G'] = p^2$ is $p^4 = p^2 \cdot 1^2 + a \cdot p^2$ en dus $a = p^2 - 1$, in totaal heeft G dus $2p^2 - 1$ irreducibele representaties.

In het geval $[G : G'] = p^3$ is $p^4 = p^3 \cdot 1^2 + a \cdot p^2$ en dus $a = p^2 - p$, in totaal heeft G dus $p^3 + p^2 - p$ irreducibele representaties.

In het geval $[G : G'] = p^4$ is G abels en heeft dus p^4 irreducibele representaties.

Opgave 7.
Een zekere groep G van orde 12 heeft zes conjugatieklassen met representanten $g_1, \ldots, g_6$, waarbij $g_1 = 1$. Verder zijn twee irreducibele karakters χ en ψ van G bekend met de volgende waarden:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
ψ	2	0	0	-1	-1	2

(i) Bepaal de volledige karaktertabel van G.

Hint: Kijk naar tensorproducten van de gegeven karakters.

(ii) Geef de lengtes van de conjugatieklassen en de ordes van de centralisatoren van de g_i aan.

Oplossing:

(i) We weten dat het product van een irreducibele karakter met een lineaire karakter ook weer irreducibel is, daarom zijn χ^2, χ^3, $\chi^4 = \chi_1$ en $\chi\psi$ irreducibele karakters. We zien dat deze karakters alle verschillend zijn, samen met χ en ψ zijn dit zes irreducibele karakters, dus hebben we de volledige karaktertabel gevonden:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
χ^2	1	-1	-1	1	1	1
χ^3	1	i	$-i$	1	-1	-1
ψ	2	0	0	-1	-1	2
$\chi\psi$	2	0	0	-1	1	-2

(ii) Uit de orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen volgen nu rechtstreeks de ordes van de centralisatoren, namelijk $|C_G(g_1)| = |C_G(g_6)| = 12$, $|C_G(g_2)| = |C_G(g_3)| = 4$, $|C_G(g_4)| = |C_G(g_5)| = 6$. De lengtes van de conjugatieklassen van g_i zijn dus 1 voor g_1 en g_6, 3 voor g_2 en g_3 en 2 voor g_4 en g_5.

Opgave 8. Bonusopgave

Zij G een groep van oneven orde en zij χ een irreducibel karakter van G over $\mathbb{C}$.

(i) Laat zien dat het eenheidselement $1 \in G$ het enige element van G is met $g^{-1} = g$.

(ii) Stel dat $\chi = \overline{\chi}$. Bewijs dat in dit geval voor het inproduct van χ met het triviale karakter χ_1 van G geldt dat

$$(\chi, \chi_1)_G = \frac{1}{|G|}(\chi(1) + 2\alpha)$$

voor een algebraïsch geheel getal α.

(iii) Concludeer dat $\chi = \overline{\chi}$ alleen kan gelden als $\chi = \chi_1$ het triviale karakter is.

Hint: Bekijk het inproduct van χ met χ_1 en gebruik deel (ii).

Oplossing:

(i) Uit $g^{-1} = g$ volgt $g^2 = 1$ en omdat G oneven orde heeft volgt hieruit $g = 1$.

(ii) Voor $g \neq 1$ is volgens de aanname $\chi(g) = \overline{\chi}(g) = \chi(g^{-1})$ en dus $\chi(g) + \chi(g^{-1}) = 2\chi(g)$. Verdeel nu de elementen $g \neq 1$ in twee verzamelingen G_+ en G_- zo dat van ieder paar g, g^{-1} één element in G_+ en één in G_- ligt. Dan is $(\chi, \chi_1)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\big(\chi(1) + \sum_{g\in G_+} 2\chi(g)\big) = \frac{1}{|G|}(\chi(1) + 2\alpha)$ voor $\alpha = \sum_{g\in G_+}\chi(g)$. Omdat de $\chi(g)$ algebraïsch gehele getallen zijn, geldt dit ook voor α.

(iii) Als $\chi \neq \chi_1$ is $(\chi, \chi_1)_G = 0$ omdat χ irreducibel is. Uit deel (ii) volgt dan dat $0 = \chi(1) + 2\alpha$, dus $\chi(1) = -2\alpha$. Omdat α een algebraïsch geheel getal is en $\alpha = -\frac{1}{2}\chi(1) \in \mathbb{Q}$ volgt nu dat $\alpha \in \mathbb{Z}$. Maar dan is $\chi(1) = -2\alpha$ een even getal, terwijl aan de andere kant $\chi(1)$ een deler is van $|G|$ en dus oneven. Dit is een tegenspraak, dus is toch $\chi = \chi_1$.