Tentamen Groepen en Representaties (kans A)

Volle punten bij opgaven 1 t/m 7 leveren het cijfer 10 op, met de bonusopgave 8 kunnen extra punten verdiend worden.

Opgave 1.
Bepaal, tot op isomorfie na, alle abelse groepen van orde 500.
Welke van deze groepen bevatten een element van orde ≥ 100?
Welke van deze groepen bevatten een element van orde gelijk aan 100?

Opgave 2.
Zij p een priemgetal en zij S_p de symmetrische groep van graad p.

(i) Bewijs dat S_p precies $(p-2)!$ ondergroepen van orde p bevat en dat al deze ondergroepen in S_p geconjugeerd zijn.

(ii) Zij $H \leq S_p$ een ondergroep van orde p. Bepaal de orde van de normalisator $N_{S_p}(H) = \{g \in S_p \mid gHg^{-1} = H\}$ van H in S_p.

Opgave 3.
Zij G een groep en laten $N, K \trianglelefteq G$ oplosbare normaaldelers zijn van G.

(i) Laat zien dat $NK = \{nk \mid n \in N, k \in K\}$ een oplosbare normaaldeler is van G.

(ii) Bewijs dat een eindige groep G een eenduidige maximale oplosbare normaaldeler heeft.

Opgave 4.
Laten Δ_1 en Δ_2 representaties van graad n over $\mathbb{C}$ zijn van een eindige groep G. Neem aan dat er voor iedere $g \in G$ een inverteerbare matrix X_g bestaat zo dat $\Delta_2(g) = X_g^{-1}\Delta_1(g)X_g$.
Bewijs dat Δ_1 en Δ_2 equivalente representaties van G zijn, d.w.z. dat er een inverteerbare matrix T bestaat zo dat $\Delta_2(g) = T^{-1}\Delta_1(g)T$ voor alle $g \in G$.

Opgave 5.
Zij $D_4 = \langle r, s\rangle$ de diëdergroep van orde 8, voortgebracht door een rotatie r van orde 4 en een spiegeling s. Volgens de stelling van Wedderburn is $\mathbb{C}D_4 \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2\times 2}$ omdat D_4 over $\mathbb{C}$ vier irreducibele representaties van graad 1 en één van graad 2 heeft.

(i) Geef een basis van het centrum van $\mathbb{C}D_4$ aan.

(ii) Laat zien dat $e = \frac{1}{2}(1 - r^2)$ de centrale primitieve idempotent is die bij de 2-dimensionale irreducibele representatie behoort, d.w.z. zo dat $\mathbb{C}D_4\, e \cong_{\mathbb{C}D_4} \mathbb{C}^{2\times 2}$.

z.o.z. voor Opgaven 6 t/m 8

Opgave 6.
Zij p een priemgetal en zij G een groep van orde p^4.

(i) Laat zien dat de graad van een irreducibele representatie van G over $\mathbb{C}$ alleen maar 1 of p kan zijn.

(ii) Bepaal de mogelijkheden voor het aantal irreducibele representaties van G over $\mathbb{C}$.

Opgave 7.
Een zekere groep G van orde 12 heeft zes conjugatieklassen met representanten $g_1, \dots, g_6$, waarbij $g_1 = 1$. Verder zijn twee irreducibele karakters χ en ψ van G bekend met de volgende waarden:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
ψ	2	0	0	-1	-1	2

(i) Bepaal de volledige karaktertabel van G.

Hint: Kijk naar tensorproducten van de gegeven karakters.

(ii) Geef de lengtes van de conjugatieklassen en de ordes van de centralisatoren van de g_i aan.

Opgave 8. Bonusopgave
Zij G een groep van oneven orde en zij χ een irreducibel karakter van G over $\mathbb{C}$.

(i) Laat zien dat het eenheidselement $1 \in G$ het enige element van G is met $g^{-1} = g$.

(ii) Stel dat $\chi = \overline{\chi}$. Bewijs dat in dit geval voor het inproduct van χ met het triviale karakter χ_1 van G geldt dat

$$(\chi, \chi_1)_G = \frac{1}{|G|}(\chi(1) + 2\alpha)$$

voor een algebraïsch geheel getal α.

(iii) Concludeer dat $\chi = \overline{\chi}$ alleen kan gelden als $\chi = \chi_1$ het triviale karakter is.

Hint: Bekijk het inproduct van χ met χ_1 en gebruik deel (ii).

Succes ermee!