Exam - Calculus B, July 9 2021, 8:30 - 11:30

Some remarks:

-You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.

-When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.

-You may write in English or in Dutch.

-Write each problem on a distinct sheet of paper.

-Don't forget to write your name and your student number on each sheet of paper you are handing in.

-For each answer, explain how you obtained it.

Problem 1. *20pts.* Consider the functions $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by:

$$u(x,y) = \frac{x-y}{1+y^2}, \qquad v(x,y) = \sin(x+y)\cosh\left(\frac{x+y}{\sqrt{3}}\right),$$

where $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

a) Calculate the differential of the function $u(x,y)$ in $(0,0)$.

b) Calculate the Taylor polynomial of degree three of $v(x,y)$ in point $(0,0)$.

c) By using the implicit function theorem, show that the system of equations:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

can be solved around $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,0,0,0)$ by two differentiable functions $x = x(u,v)$ and $y = y(u,v)$.

d) Calculate the partial derivative $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

Problem 2. *20pts.* Let D be the domain in $\mathbb{R}^2$ described by the inequalities

$$\sqrt{1+3y^2} \leq x \leq 2.$$

a) Draw a sketch of D.

b) Find the minimum and the maximum of the function $h(x,y) = (2x-y)^2$ on D.

Problem 3. *20pts.* Consider the following vector field on $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{V} = xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}.$$

a) Determine the field lines of $\mathbf{V}$.

b) Is $\mathbf{V}$ conservative? If yes, then find a scalar potential for $\mathbf{V}$.

c) Find a vector field $\mathbf{F}$ whose curl is $\mathbf{V}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{V},$$

or prove that no vector field exists satisfying this equation.

Problem 4. *20pts.* Calculate:

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\,\mathrm{d}y.$$

Problem 5. *20pts.* Let B be the ball of radius $a > 0$ in $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

Consider the vector field:

$$\mathbf{F} = (x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Verify the divergence theorem for $\mathbf{F}$ on B by calculating **both** sides of the equality in the theorem.

Tentamen - Calculus B, 9 juli 2021, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

-Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.

-Je mag het tentamen zowel in het Engels als in het Nederlands maken.

-Schrijf elke opgave op een apart blad.

-Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op elk blad dat je inlevert.

-Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

Opgave 1. *20pnt.* Beschouw de functies $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door:

$$u(x,y) = \frac{x-y}{1+y^2}, \qquad v(x,y) = \sin(x+y)\cosh\big(\frac{x+y}{\sqrt{3}}\big),$$

waarbij $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

a) Bereken de differentiaal van de functie $u(x,y)$ in punt $(0,0)$.

b) Bereken het Taylorpolynoom van derde orde van de functie $v(x,y)$ in punt $(0,0)$.

c) Met behulp van de impliciete functiestelling, laat zien dat het stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

rond het punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,0,0,0)$ kan worden opgelost met x en y twee differentieerbare functies $x = x(u,v)$ and $y = y(u,v)$.

d) Bereken de partiële afgeleide $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

Opgave 2. *20pnt.* Zij D het gebied in $\mathbb{R}^2$ beschreven door de ongelijkheden:

$$\sqrt{1+3y^2} \le x \le 2.$$

a) Maak een schets van D.

b) Bepaal het minimum en het maximum van de functie $h(x,y) = (2x-y)^2$ op D.

Opgave 3. *20pnt.* Beschouw het vectorveld op $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{V} = xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}.$$

a) Bepaal de veldlijnen van $\mathbf{V}$.

b) Is $\mathbf{V}$ conservatief? Als ja, dan bepaal een scalaire potentiaal voor $\mathbf{V}$.

c) Vind een vectorveld $\mathbf{F}$ met rotatie $\mathbf{V}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{V},$$

of bewijs dat er geen vectorveld bestaat dat hieraan voldoet.

Opgave 4. *20pnt.* Bereken

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\mathrm{d}y.$$

Opgave 5. *20pnt.* Zij B het gebied binnen de bol van straal $a > 0$ in $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2.$$

Controleer de Divergentiestelling voor het vectorveld:

$$\mathbf{F} = (x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

op B door **beide** zijden van de vergelijking in de stelling te berekenen.