Exam - Calculus B, June 21 2021, 8:30 - 11:30

Some remarks:

-You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.

-When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.

-You may write in English or in Dutch.

-Write each problem on a distinct sheet of paper.

-Don't forget to write your name and your student number on each sheet of paper you are handing in.

-For each answer, explain how you obtained it.

Problem 1. *20pts.* Let $f(x, y) = x\cos^2(x + y) - \sin(y)$.

a) Calculate the directional derivative of f in the direction $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ in the point $p = (0, 0)$.

b) Find the equation of the tangent plane in point $(0, 0, 0)$ to the surface in $\mathbb{R}^3$ given as the graph of f:

$$z = f(x, y).$$

c) By using the implicit function theorem, show that the equation $f(x, y) = 0$ can be solved around $(0, 0)$ for x as a differentiable function g of y:

$$x = g(y).$$

d) Calculate $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0)$.

e) Calculate the Taylor polynomial of degree three of f in $(0, 0)$.

Problem 2. *20pts.* Let D be the domain in $\mathbb{R}^2$ described by the inequalities:

$$0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

a) Draw a sketch of D.

b) Find the minimum and the maximum of the function $h(x, y) = (x + 4)(y + 2)$ on D.

Problem 3. *15pts.* Consider the function $u(x, y) = ye^{2x}$ and the vector field $\mathbf{V} = \nabla u$.

a) Sketch the level sets of u.

b) Determine the field lines of the vector field $\mathbf{V}$.

c) Let $\mathscr{C}$ be the curve given by the equation $x^{2020} + y^{2020} = 1$. Calculate:

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Problem 4. *20pts.* Let G be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

$$0 \leq z \leq -y, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

a) Make a sketch of G.

b) Calculate

$$\iiint_G z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Problem 5. *25pts.* Let $\mathscr{S}$ be the surface in $\mathbb{R}^3$ given by

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

We orient $\mathscr{S}$ such that $(0, 0, 0)$ is on the negative side of $\mathscr{S}$. Consider the vector field

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - zx\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}.$$

a) Draw a sketch of $\mathscr{S}$, and indicate on the drawing the induced orientation on the boundary of $\mathscr{S}$.

b) Find a parametrization $\mathbf{r} : R \to \mathscr{S}$ and calculate $\mathrm{d}\mathbf{S}$ in this parametrization.

c) Calculate $\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$.

d) Verify Stokes' Theorem for $\mathbf{F}$ on $\mathscr{S}$ by calculating **both** sides of the equality in the theorem.

Tentamen - Calculus B, 21 juni 2021, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

-Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.

-Je mag het tentamen zowel in het Engels als in het Nederlands maken.

-Schrijf elke opgave op een apart blad.

-Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op elk blad dat je inlevert.

-Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

Opgave 1. *20pnt.* Zij $f(x,y) = x\cos^2(x+y) - \sin(y)$.

a) Bereken richtingsafgeleide van f in de richting $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ in het punt $p = (0,0)$.

b) Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt $(0,0,0)$ aan het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven als de grafiek van f:

$$z = f(x,y).$$

c) Bereken het Taylorpolynoom van derde orde van f in $(0,0)$.

d) Met behulp van de impliciete functiestelling, laat zien dat de vergelijking $f(x,y) = 0$ kan rond $(0,0)$ worden opgelost met x als differentieerbare functie g van y:

$$x = g(y).$$

e) Bereken $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0)$.

Opgave 2. *20pnt.* Zij D het gebied in $\mathbb{R}^2$ beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

a) Maak een schets van D.

b) Bepaal het minimum en het maximum van de functie $h(x,y) = (x+4)(y+2)$ op D.

Opgave 3. *15pnt.* Beschouw de functie $u(x,y) = ye^{2x}$ en het vectorveld $\mathbf{V} = \nabla u$.

a) Maak een schets van de niveaukrommen van u.

b) Bepaal de veldlijnen van het vectorveld $\mathbf{V}$.

c) Zij $\mathscr{C}$ de kromme beschreven door de vergelijking $x^{2020} + y^{2020} = 1$. Bereken:

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Opgave 4. *20pnt.* Zij G het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \leq z \leq -y, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

a) Maak een schets van G.

b) Bereken

$$\iiint_G z \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Opgave 5. *25pnt.* Zij $\mathscr{S}$ het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ beschreven door

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

We oriënteren $\mathscr{S}$ zó dat het punt $(0,0,0)$ op de negatieve zijde van $\mathscr{S}$ is. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - zx\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}.$$

a) Maak een schets van $\mathscr{S}$ en geef op de tekening geïnduceerde de oriëntatie op de rand van $\mathscr{S}$ aan.

b) Vind een parametrisatie $\mathbf{r} : R \to \mathscr{S}$, en bereken $\mathrm{d}\mathbf{S}$ in deze parametrisatie.

c) Bereken $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$.

d) Controleer de Stelling van Stokes voor $\mathbf{F}$ op $\mathscr{S}$ door **beide** zijden van de vergelijking in de stelling te berekenen.