Tentamen Discrete Wiskunde (WB011)

5 november 2021

Gebruik van een (grafische) rekenmachine en het lesboek (David R. Mazur – *Combinatorics, A guided Tour*) is toegestaan.

Dit tentamen duurt twee uur. Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. In totaal zijn er 27 punten te verdienen.

Het cijfer dat je krijgt is 1 + 9 × aantal gehaalde punten / 27. Vervolgens wordt de bonusregeling toegepast zoals uitgelegd op Brightspace. Het resultaat wordt daarna afgerond op halve punten. Uitzondering zijn resultaten tussen de 5 en de 6: deze worden afgerond op hele punten.

Succes!

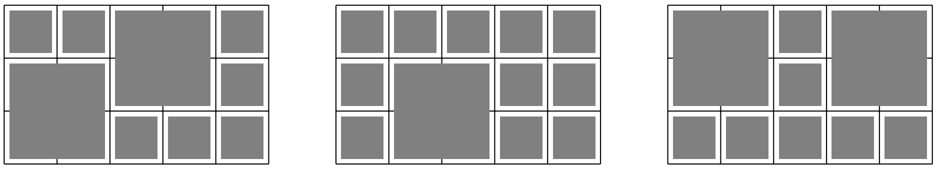
Opgave 1 (3 punten)**.** Zij $n, m \geq 1$. Bewijs: er zijn $P(n+m) - P(n)$ partities van het getal $n+m$ waarbij geen enkel deel gelijk is aan m.

Opgave 2 (5 punten)**.** De rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ is recursief gegeven door

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 9, \\ a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \left(\!\!\binom{7}{n}\!\!\right) \qquad \text{als } n \geq 2. \end{aligned}$$

Leid een compacte vorm van de gewone voortbrengende functie (OGF) van de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ af.

Opgave 3 (4 punten)**.** In deze opgave beschouwen we betegelingen van een $3 \times n$ rechthoek met een combinatie van vierkante tegels van 1×1 en van 2×2. Hieronder staan drie voorbeelden van zulke betegelingen bij $n = 5$.



Zij nu t_n het aantal van dit soort betegelingen. Leid een recursieve formule af voor t_n voor $n \geq 0$.

Opgave 4 (5 punten)**.** Stel n en m zijn positieve gehele getallen. Hoeveel partities zijn er van de verzameling $\{1, 2, \ldots, nm\}$ in n blokken die allemaal van grootte m zijn, waarbij geen van de 'standaard' blokken

$$\{1, 2, \ldots, m\}, \quad \{m+1, 2, \ldots, 2m\}, \quad \ldots \quad, \{(n-1)m+1, (n-1)m+2, \ldots, nm\}$$

voorkomt?

Opgave 5 (3 + 7 punten)**.**

(a) Zij $(X, \leq)$ een partiële ordening met bijbehorende zetafunctie ζ en Möbiusfunctie μ. Gebruik het feit dat μ een rechtsinverse is van ζ, dus dat $\zeta\mu = \delta$, om te bewijzen dat voor $x, y \in X$ met $x < y$ geldt dat

$$\mu(x, y) = -\sum_{x < z \leq y} \mu(z, y).$$

(b) Zij X de verzameling van partities van $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ die bestaan uit ofwel 1, ofwel 3, ofwel 4, ofwel 7 blokken. We maken hierbij de partiële ordening $\mathbf{X} = (X, \preceq)$ door de partities te ordenen met verfijning. $\mathbf{X}$ is dus een deel-partiële ordening van $\mathbf{\Pi_7}$ zoals beschreven in het boek. Ga met een berekening na dat

$$\mu\left(\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{7\}\},\ [7]\right) = -1450.$$