dr. M.L.A. van Pruijssen Nijmegen, 17 januari 2022

Calculus A (WP025) 2021-22

Tentamen

Naam: ______________________ Studentnummer: ______________

Naam werkcollegeleider: ______________________________

- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Schrijf netjes en wees bondig. Motiveer alle antwoorden en berekeningen.
- Je hebt 180 minuten de tijd voor dit tentamen (210 als je recht hebt op extra tijd).
- Je mag geen hulpmiddelen gebruiken.
- **Lever dit blad ook in!**

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Points:	9	11	10	10	14	10	16	10	90
Score:									

---

1. Meerkeuzevragen, je hoeft geen uitleg of berekening te geven. Er is steeds maar één goed antwoord. Een verkeerd antwoord is **minus 1**, een correct antwoord is **plus 3** en geen antwoord is **nul** punten. (9)

   Op dit blad je antwoord omcirkelen.

   (a) De functie $f(x) = x^3 + x - 1$ heeft

   A. drie reële nulpunten waarvan er één in het interval $[0, 1]$ ligt,

   B. twee reële nulpunten waarvan er één in het interval $[0, 1]$ ligt,

   C. één reëel nulpunten en wel in het interval $[0, 1]$**,**

   D. één reëel nulpunt maar dat ligt niet in het interval $[0, 1]$.

   (b) De integraal $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ is

   A. divergent

   B. convergent.

   (c) De complexe getallen $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan $|z - 3 + 4i| \leq 5$ vormen een

   A. cirkel met straal 5 en middelpunt $3 - 4i$,

   B. gesloten cirkelschijf met straal 5 **en middelpunt** $3 - 4i$**,**

   C. gesloten cirkelschijf met straal 5 en middelpunt $-3 + 4i$,

   D. cirkel met straal 5 en middelpunt $-3 + 4i$.

Solution:

(a) Tenminste één nulpunt in $[0,1]$ wegens de middelwaardestelling en $f(0) = -1$ en $f(1) = 1$. Omdat $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ is de functie stijgend, er is dus precies 1 nulpunt.

(b) De integraal $\int_1^\infty x^{-1/2}dx$ is divergent naar oneindig. Maar op $[1,\infty)$ is $1+\sqrt{x} \leq 2x^{1/2}$ zodat op dat interval $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dus de gevraagde integraal is divergent.

(c) Hier staat de verzameling van complexe getallen waarvan de afstand tot $3-4i$ kleiner dan of gelijk is aan 5. Dat is dus een gesloten cirkelschijf met middelpunt $3-4i$ en straal 5.

2. Beschouw de functie $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ op het interval $(0,\infty)$. (11)
   (a) Bepaal de nulpunten van h en geef aan waar h positief/negatief is.
   (b) Bepaal de afgeleide van h.
   (c) Bepaal de (scheve/verticale/horizontale) asymptoten van h indien deze bestaan.
   (d) Bepaal de extreme waarden (min/max, lokaal/globaal) van h.

Solution: (a) $h(x) = 0$ precies als $\ln(x) = 0$ dus precies als $x = 1$. Omdat $x > 0$ wordt het teken bepaald door $\ln(x)$ zodat $h(x) < 0$ voor $x \in (0,1)$ en $h(x) > 0$ voor $(1,\infty)$.

(b) $h'(x) = \frac{1=\ln(x)}{x^2}$.

(c) $\lim_{x\to 0+} h(x) = -\infty$ en $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ want een positieve macht van x *overpowert* $\ln(x)$ (een bewijs met l'Hôpital II is niet nodig, wel een toelichting). Daarmee is er een varticale asymptoot bij $x = 0$ en een horizontale asymptoot $y = 0$. Omdat h continu is, zijn er verder geen asymptoten.

(d) Er zijn geen randpunten en geen singulariteiten, dus de enige kandidaten komen van stationaire punten. Daartoe lossen we op $h'(x) = 0$, er moet dus gelden $x = e$, de enige kandidaat. Links van $x = e$ stijgt de functie, daar is $h'(x) > 0$, rechts van $x = e$ daalt de functie, daar is $h'(x) < 0$. Daarmee is $h(e) = e^{-1}$ een globaal maximum.

3. Zij C de kromme die gegeven wordt door de vergelijking (10)

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2}{y} + 1.$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme C in het punt $(-1,-1)$.

Solution: (2.9.7) Dit punt ligt gelukkig op C. Impliciet differentiëren, maar eerst met $(x+y)y$ vermenigvuldigen, wat geen kwaad kan in de buurt van $(-1,-1)$:

$$xy - y^2 = x^3 + x^2y + xy + y^2 \quad \text{oftewel} \quad 0 = x^3 + x^2y + 2y^2$$

naar x afleiden, waar $y = y(x)$ als functie van x wordt opgevat levert

$$0 = 3x^2 + 2xy + x^2y' + 4yy'$$

zodat

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 4y}.$$

Daarmee is $y'(-1) = -\frac{5}{-3} = 5/3$. De vergelijking is dus

$$y + 1 = \frac{5}{3}(x+1) \quad \text{of} \quad y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}.$$

4. Beschouw de functie $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door (10)

$$\ell(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{te^{5t}} & \text{als } t \neq 0, \\ 5 & \text{als } t = 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat ℓ continu is.

(b) De functie ℓ is zelfs glad. Bepaal de Taylorreeks van ℓ rond $t = 0$.

Solution: Bijvoorbeeld kun je dit herkennen als

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-5t}}{t} = -\left.\frac{d}{dt}(e^{-5t})\right|_{t=0} = 5$$

maar er zijn vele alternatieven (l'Hôpital, grote $\mathcal{O}$, Taylorreeks,...).

(b) Algebraïsche manipulatie: schrijf

$$\ell(t) = \frac{1 - e^{-5t}}{t} = -t^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k!}t^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k!}t^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5(-5)^m}{(m+1)!}t^m.$$

5. Bepaal de onbepaalde integralen (14)

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \arccos(x)dx.$$

Solution: (a) Zet $u = 9 + x^2$ en $du = 2xdx$. Dan is $x^2 = u - 9$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{u-9}{\sqrt{u}}du = \dots$$

nu schrijven als som van twee integralen,

$$\dots = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du - \frac{9}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}u^{3/2} - 9u^{1/2} + C = \frac{1}{3}u^{1/2}(u-27) + C = \dots$$

en dan $u = x^2 + 9$ terugzetten,

$$\dots = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}(x^2-18) + C,$$

De integratieconstante niet vergeten! Een sluwe Ansatz werkt natuurlijk ook.

(b) Met de productregel $f' = 1, g = \arccos(x)$ is $f = x, g' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zodat

$$\int \arccos(x)dx = x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \dots$$

en voor die tweede term nemen we $u = 1 - x^2, du = -2xdx$ dus $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = -u^{1/2}$ zodat

$$\dots = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C,$$

ook hier de integratieconstante niet vergeten.

6. Beschouw de machtreeks (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}$$

en bepaal voor welke waarde van $x \in \mathbb{R}$ de reeks absoluut convergeert, voorwaardelijk convergeert of divergeert.

Solution: Gebruik de ratiotest:

$$\frac{\left(\frac{(2x+3)^{n+1}}{(n+1)^{1/3}4^{n+1}}\right)}{\left(\frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}\right)} = \frac{(2x+3)}{4} \cdot \frac{n^{1/3}}{(n+1)^{1/3}} \to \frac{(2x+3)}{4} \quad \text{als } n \to \infty.$$

Dus moet $\left|\frac{(2x+3)}{4}\right| < 1$, oftewel $|x + \frac{3}{2}| < 2$ voor absolute convergentie. Dat is te zeggen, absolute convergentie voor

$$\frac{-7}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Buiten het dit interval is er divergentie, dat is dus voo $|x + \frac{3}{2}| > 2$. De randpunten $x = -7/2$ en $x = 1/2$ moeten nader worden onderzocht.

Voor $x = 1/2$ is de reeks niet absoluut convergent, anders was de convergentiestraal wel groter. Maar voor $x = 1/2$ sommeren we $n^{-1/3}$, allemaal positief, dus daar moet wel divergentie naar oneindig zijn. Je kunt deze reeks ook naar beneden afschatten met een integraal waarvan we weten dat-ie naar oneindig divergeert.

Voor $x = -7/2$ hebben we de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3} 4^n}$$

waarop de alternerende-reeksen-test van toepassing is: Het teken wisselt steeds, in absolute waarde is de volgende steeds kleiner en wordt zelfs zo klein dat de limiet naar nul gaat. Al met al voorwaardelijke convergentie in $x = -7/2$.

7. Los op: (16)

(a) $x^2 y' + y = x^2 e^{1/x}$, $y(1) = 3e$

(b) $y(x) = 1 + \int_1^x \frac{y(t)}{t(t+1)} dt$

Solution: (a) Dit is een lineaire ODE van orde één. Er zijn (tenminste) twee oplossingsmethoden:

Integrerende factor: $\mu = \int (1/x^2) dx = -1/x$ en zet $Y = e^{-1/x} y(x)$. Dan is

$$Y'(x) = e^{-1/x} e^{1/x} = 1$$

zodat $Y(x) = x + C$. Dan is $y(x) = (x + C)e^{1/x}$ en dus $y(1) = (1 + C)e = 3e$ zodat $C = 2$ en daarmee

$$y(x) = (x + 2)e^{1/x}.$$

Variatie van de constante: de vergelijking $y' + x^{-2} y = 0$ heeft algemene oplossing $Ce^{1/x}$. Veronderstel dat $y(x) = C(x)e^{1/x}$ een oplossing is. Dan voldoet $C(x)$ aan

$$C'(x) = 1$$

zodat $C(x) = x + c$. Dus weer $y(x) = (x + c)e^{1/x}$ en ook weer $c = 2$ zodat

$$y(x) = (x + 2)e^{1/x}$$

de gezochte oplossing is.

(b) Kennelijk is $y(1) = 1$ en (na differentiatie) $y' = \frac{y}{x(x+1)}$, dat is een beginwaarde probleem, op te lossen met het scheiden van variabelen:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+1)} = \dots$$

en met breuksplitsen wordt dit

$$\dots = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Een primitive van de rechterkant is $\ln(|x|) - \ln(|x+1|) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$, een primitieve van de linkerkant is $\ln(|y|)$. Daarmee is

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C = \ln\left(K\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$$

voor een constante $K \geq 0$. Omdat ln injectief is, geldt

$$|y(x)| = K\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

In de buurt van $x = 1$ wisselt $x/(x+1)$ niet van teken, dus we kunnen daar de absoluutstrepen weglaten. Omdat y continu is, want differentieerbaar verondersteld, kunnen daar de absoluutstrepen ook weg, voor de prijs dat K nu ook negatief mag zijn. Dus $y(x) = Kx/(x+1)$. Omdat $y(x) = 1$ moet $K = 2$ zodat

$$y(x) = \frac{2x}{x+1}$$

de gevraagde oplossing is.

8. Bepaal de algemene reële oplossingen van de differentiaalvergelijking (10)

$$y'' + 2y' + 5y = x^2.$$

Solution: Eerst homogeen: er moet gelden dat $r^2 + 2r + 5 = 0$ dus $(r+1)^2 = -4$ zodat $r = -1 \pm 2i$. Dus de algemene oplossing dan het homogene probleem is

$$e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)), \quad \text{met } A, B \in \mathbb{R}$$

omdat we in de reële oplossing geïnteresseerd zijn.

Ansatz: de particuliere oplossing zal wel een polynoom zijn in x van graad twee; $y(x) = ax^2 + bx + c$. Dan is $y' = 2ax + b$ en $y'' = 2a$ en invullen geeft

$$2a + 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = x^2.$$

Links en rechts staan polynomen en we vergelijken coeffienten: die van x^2 geven $5a = 1$ dus $a = 1/5$; die van x geven $4a + 5b = 0$ dus $b = -4/25$. De constante termen geven dan $2a + 2b + 5c = 0$ zodat $c = (-2/5 + 8/25)/5 = -2/125$. Dus $y(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{2}{125}$. Zo vinden we de algemene oplossing:

$$y(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{2}{125} + e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)), \quad \text{met } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einde