Tentamen Inleiding Meetkunde
12 januari 2021, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd. (Tenzij expliciet anders vermeld, zoals bij opgave 4(b).)
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 31 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/31 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. (2+3+3 punten) Beschouw de punten

$$\begin{aligned} P &= [1 : 1 : 2]; \\ Q &= [2 : 1 : 3] \end{aligned}$$

in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Bewijs dat $P \neq Q$.

(b) Zij l de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door P en Q. Vind $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn l bestaat uit alle lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ die bevat zijn in het vlak

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}.$$

(c) Beschouw de bijectie $f\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{E}(\mathbb{R}^2)$ gegeven door

$$f([x : y : z]) = \begin{cases} (x/z, y/z) & \text{als } z \neq 0; \\ P_\infty & \text{als } z = 0, \end{cases}$$

waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn in $\mathbb{R}^2$ door de oorsprong en (x, y). Geef een vergelijking voor $f(l) \cap \mathbb{R}^2$.

Oplossing. (a) Als $P = Q$, dan is er een $t \neq 0$ zo dat

$$\begin{aligned} 2 &= t \cdot 1; \\ 1 &= t \cdot 1; \\ 3 &= t \cdot 2. \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $t = 1$. De eerste vergelijking wordt dan $2 = 1$, een tegenspraak.

(b) De coëfficienten a, b, c zijn oplossingen van

$$\begin{aligned} a + b + 2c &= 0; \\ 2a + b + 3c &= 0. \end{aligned}$$

Die van elkaar aftrekken geeft $a+c=0$. Dus $c=-a$, en de eerste vergelijking geeft $b-a=0$, dus $b=a$. Dus $a=1$, $b=1$, $c=-1$ voldoen.

(c) Als $[x:y:z]\in l$, dan is $ax+by+cz=0$. Dus als $z\neq 0$,

$$a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0.$$

We concluderen dat

$$f(l)\cap\mathbb{R}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; ax+by+c=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y-1=0\}.$$

Opgave 2. (5 punten) In deze opgave werken we met een abstract projectief vlak. Laat A,B,C,D verschillende punten zijn in dat projectieve vlak. Laat P,Q punten zijn in het projectieve vlak zo dat

- het punt P zowel op de lijn door A en B als op de lijn door C en D ligt; en
- het punt Q zowel op de lijn door A en C als op de lijn door B en D ligt.

Bewijs dat als $P=Q$, dan liggen de punten A,B,C,D op één lijn. *Hint:* voor jezelf een plaatje tekenen kan helpen.

Oplossing. Voor elke twee verschillende punten X,Y schrijven we $l(X,Y)$ voor de lijn door X en Y.

We bekijken eerst het geval dat $P\in\{A,B,C,D\}$. Stel dat $P=A$, de andere gevallen zijn hetzelfde. Als $P=Q$, dan is ook $Q=A$. Dus:

- de lijnen $l(A,C)$ en $l(C,D)$ bevatten de twee verschillende punten P en C, en zijn dus gelijk;
- de lijnen $l(A,B)$ en $l(B,D)$ bevatten de twee verschillende punten Q en B, en zijn dus gelijk.

Het eerste punt laat zien dat A, C en D op één lijn liggen. Het tweede punt laat zien dat A, B en D op één lijn liggen. Dus A, B, C en D liggen op één lijn.

Stel nu dat $P\notin\{A,B,C,D\}$ en dat $P=Q$. Dan zijn de lijnen $l(A,P)$, $l(B,P)$, $l(A,Q)$ en $l(B,Q)$ goed gedefinieerd. En

$$C\in l(A,Q)=l(A,P)=l(A,B).$$

Net zo

$$D\in l(B,Q)=l(B,P)=l(A,B).$$

Dus $A,B,C,D\in l(A,B)$.

Opgave 3. (3+3+4+3 punten) Beschouw de punten

$$P_1=[1:2],\quad P_2=[-1:3],\quad P_3=[-1:1]\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Zij $P_4=[x_4:y_4]$ een vierde punt in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Zij $f\colon\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ een projectieve transformatie, zo dat

$$f(P_1)=[1:0],\quad f(P_2)=[0:1],\quad f(P_3)=[1:1],\quad f(P_4)=[1:2].$$

(a) Druk de dubbelverhouding $[P_1, P_2; P_3, P_4]$ uit in x_4 en y_4, en bereken de dubbelverhouding $[f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4)]$. *Hint:* de dubbelverhouding van vier verschillende punten $P_j = [x_j : y_j] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, voor $j = 1, 2, 3, 4$, is gedefinieerd als

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = \frac{(x_1y_3 - y_1x_3)(x_2y_4 - y_2x_4)}{(x_1y_4 - y_1x_4)(x_2y_3 - y_2x_3)}.$$

(b) Gebruik dubbelverhoudingen om P_4 te bepalen.

(c) Gebruik de punten P_1, P_2 en P_3, en hun beelden onder f, om te bewijzen dat er $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zijn zo dat voor alle $[x : y] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$,

$$f([x : y]) = [ax + by : cx + dy],$$

waarbij $ad - bc \neq 0$, en

$$\begin{aligned} c + 2d &= 0; \\ -a + 3b &= 0; \\ -a + b &= -c + d. \end{aligned}$$

Hint: dit onderdeel staat los van onderdelen (a) en (b).

(d) Gebruik onderdeel (c) om een expliciete uitdrukking te geven voor f.

Oplossing. (a)

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = \frac{(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1))((-1) \cdot y_4 - 3 \cdot x_4)}{(1 \cdot y_4 - 2 \cdot x_4)((-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-1))} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{y_4 + 3x_4}{y_4 - 2x_4},$$

en

$$[f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4)] = \frac{(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1)}{(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1)(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Omdat projectieve transformaties dubbelverhoudingen behouden, geldt

$$\frac{-3}{2} \cdot \frac{y_4 + 3x_4}{y_4 - 2x_4} = \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat

$$-3y_4 - 9x_4 = y_4 - 2x_4.$$

Dus $4y_4 + 7x_4 = 0$, en $P_4 = [4 : -7]$.

(c) Per definitie van projectieve transformaties zijn er $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $ad-bc \neq 0$ zo dat voor alle $[x : y] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$,

$$f([x : y]) = [ax + by : cx + dy].$$

Door de punten P_1, P_2 en P_3 in te vullen vinden we

$$\begin{aligned} [a + 2b : c + 2d] &= [1 : 0]; \\ [-a + 3b : -c + 3d] &= [0 : 1]; \\ [-a + b : -c + d] &= [1 : 1]. \end{aligned}$$

Deze impliceren respectievelijk dat

$$\begin{aligned} c + 2d &= 0; \\ -a + 3b &= 0; \\ -a + b &= -c + d. \end{aligned}$$

(d) We vinden $a = 3b$ uit de tweede vergelijking, en $c = -2d$ uit de eerste. Invullen in de derde geeft

$$-2b = 3d.$$

We concluderen dat

$$\begin{aligned} d &= -2b/3; \\ a &= 3b; \\ c &= -2d = 4b/3. \end{aligned}$$

Dus

$$f([x:y]) = [b(3x+y) : b(4x/3 - 2y/3)] = [3x + y : 4x/3 - 2y/3].$$

Opgave 4. (2+3 punten) Beschouw de afbeelding f van het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$ naar zichzelf, gegeven door

$$f(z) = \frac{1}{1-z},$$

voor $z \in \mathbb{H}$.

(a) Bewijs dat f een Möbiustransformatie is.

(b) Schrijf f als een samenstelling van spiegelingen in (niet-Euclidische) lijnen in $\mathbb{H}$. Geef aan welke lijnen dit zijn, zonder dat te bewijzen. *Hint:* als één van die spiegelingen kun je de afbeelding $z \mapsto 1/\bar{z}$ nemen. In welke lijn is dit een spiegeling?

Oplossing. (a) Een afbeelding van de vorm

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $ad - bc > 0$, is een Möbiustransformatie. In dit geval is $a = 0$, $b = d = 1$ en $c = -1$, dus $ad - bc = 0 - (-1) = 1 > 0$.

(b) Definieer $g_1(z) = 1 - \bar{z}$ en $g_2(z) = 1/\bar{z}$. Dan is $f = g_2 \circ g_1$. En g_1 is een spiegeling in de lijn $x = 1/2$, en g_2 is spiegeling in de halve cirkel $|z| = 1$.