Tentamen Inleiding Meetkunde
10 januari 2020, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Veel succes!

Opgave 1. (2 + 3 + 3 punten)

(a) Welke van de volgende punten van $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ representeren de lijn in $\mathbb{R}^3$ door O en $(-1, 2, 1)$?

$$[1 : -2 : -1], \qquad [-2 : 4 : 1], \qquad [-\frac{1}{2} : 1 : \frac{1}{2}], \qquad [-1 : 2 : 0]$$

(b) Zij ℓ_1 de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door $[-1 : 2 : 1]$ en $[0 : 2 : 0]$ en zij ℓ_2 de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door $[1 : 0 : 0]$ en $[1 : 2 : 3]$. Bepaal het snijpunt $\ell_1 \cap \ell_2$.

(c) Laat zien dat de vier punten uit onderdeel (b) een vierhoek in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ vormen.

Oplossing. (a) $[1 : -2 : -1]$ wel, $[-2 : 4 : 1]$ niet $[-\frac{1}{2} : 1 : \frac{1}{2}]$ wel ,$[-1 : 2 : 0]$ niet.
(b) De lijn door $[v], [w]$ met $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ bestaat uit de punten $[\lambda v + \mu w]$ met $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dus

$$\ell_1 = \{[-a : 2a + 2b : a] : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$
$$\ell_2 = \{[c + d : 2d : 3d] : (c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

We zoeken a, b, c, d zodat

$$[-a : 2a + 2b : a] = [c + d : 2d : 3d].$$

Neem $a = 3d$, dan klopt de derde coördinaat. Vanwege de eerste coördinaat nemen we $c = -4d$. Dan zoeken we nog b en d zodat

$$[-3d : 6d + 2b : 3d] = [-3d : 2d : 3d].$$

Als we $b = -2d$ nemen, dan geldt deze vergelijking. Nu mogen we $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ willekeurig kiezen, dat levert toch hetzelfde punt in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ op. Bijvoorbeeld $d = 1$ geeft het snijpunt $[-3 : 2 : 3]$.
(c) Stel dat ze geen vierhoek vormen. Dan is er een lijn ℓ in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ waarop minstens drie van deze vier hoekpunten liggen. Dan ligt er hoogstens eentje niet op ℓ. Dus ofwel ℓ bevat $[-1 : 2 : 1]$ en $[0 : 2 : 0]$, ofwel ℓ bevat $[1 : 0 : 0]$ en $[1 : 2 : 3]$. Dat betekent dat ofwel $\ell = \ell_1$, ofwel $\ell = \ell_2$. Maar het snijpunt $\ell_1 \cap \ell_2$ is niet gelijk aan een van de vier hoekpunten, dus ℓ_1 bevat precies twee van de vier hoekpunten en ℓ_2 bevat ook precies twee van de vier hoekpunten. Dit is in tegenspraak met de eigenschap van ℓ.

Opgave 2. (2 + 1 + 2 punten)
In $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ hebben we de punten

$$P_1 = [1:1], \quad P_2 = [1:-1], \quad P_3 = [2:1], \quad P_4 = [1:2], \quad P_5 = [3:1], \quad P_6 = [1:3].$$

Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $ad - bc \neq 0$. Bekijk een projectieve transformatie $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ gegeven door

$$f([x:y]) = [ax + by : cx + dy].$$

(a) Stel dat $f(P_1) = P_1$ en $f(P_2) = P_2$. Laat zien dat er $a, b \in \mathbb{R}$ zijn zodat

$$f([x:y]) = [ax + by : bx + ay].$$

(b) Bepaal de dubbelverhoudingen $[P_1, P_2; P_3, P_4]$ en $[P_1, P_2; P_5, P_6]$.

Ter herinnering, de dubbelverhouding van vier reële getallen x_i is

$$[x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}.$$

(c) Laat zien dat er een projectieve transformatie $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ bestaat, zodat $f(P_1) = P_1, f(P_2) = P_2, f(P_3) = P_5$ en $f(P_4) = P_6$.

Oplossing.
(a) Uit de conditie $[1:1] = f([1:1]) = [a+b : c+d]$ zien we dat $a + b = c + d$. De conditie $[1:-1] = f([1:-1]) = [a-b : c-d]$ betekent dat $a - b = -(c-d) = d - c$. Die twee samen leiden tot $a = d$ en $b = c$. Dus f moet van de gevraagde vorm zijn. Vanwege $ad - bc = a^2 - b^2 \neq 0$ moet hierbij $a \neq \pm b$. Omgekeerd, voor elke f van deze vorm geldt

$$f([1:1]) = [a+b : b+a] = [1:1] \quad \text{en} \quad f([1:-1]) = [a-b : b-a] = [1:-1].$$

(b) Via omschrijven naar coördinaten in $\mathbb{R}$ vinden we:

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = [1, -1; 2, 1/2] = \frac{(1-2)(-1-1/2)}{(1-1/2)(-1-2)} = \frac{3/2}{-3/2} = -1,$$
$$[P_1, P_2; P_5, P_6] = [1, -1; 3, 1/3] = \frac{(1-3)(-1-1/3)}{(1-1/3)(-1-3)} = \frac{8/3}{-8/3} = -1.$$

(c) Een stelling uit de syllabus zegt dat een dergelijke projective transformatie bestaat dan en slechts dan als $[P_1, P_2; P_3, P_4] = [P_1, P_2; P_5, P_6]$. Dat is het geval, zie onderdeel (b).

We kunnen dit ook expliciet maken met onderdeel (a). We zoeken $a, b \in \mathbb{R}$ zodat $[3:1] = f([2:1]) = [2a + b : 2b + a]$. Bijvoorbeeld voldoet $b = 1, a = -5$, want $[-10 + 1 : 2 - 5] = [-9 : -3] = [3:1]$. Dan geldt ook

$$f([1:2]) = [-5 + 2 : 1 - 10] = [-3 : -9] = [1:3].$$

Opgave 3. (2 + 1 + 3 punten)

(a) Welke van de volgende vergelijkingen definiëren een lijn in het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$?

$$2(z - \bar{z}) + 3 = 0$$
$$z\bar{z} + 2 = 0$$
$$z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) + 2 = 0$$
$$z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) + 24 = 0$$

(b) Zij $\mathcal{C}$ de halfcirkel in $\mathbb{H}$ met middelpunt -1 en straal 2. Zij $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de cirkelspiegeling ten opzichte van $\mathcal{C}$. Bepaal $f(i)$.

(c) Schrijf de afbeelding f uit onderdeel (b) als samenstelling van Möbiustransformaties van de volgende types:

$$z \mapsto az + b \quad (a, b \in \mathbb{R}, a > 0),$$
$$z \mapsto a\bar{z} + b \quad (a, b \in \mathbb{R}, a < 0),$$
$$z \mapsto 1/\bar{z}.$$

Oplossing.
(a) $2(z - \bar{z}) + 3 = 0$ niet, het zou $+\bar{z}$ moeten zijn.
$z\bar{z} + 2 = 0$ heeft geen oplossingen, dus geeft geen lijn.
$z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) + 2 = 0$ definieert een lijn, want $A = 1, B = 10, C = 2$ en

$$B^2 - 4AC = 10^2 - 4 \cdot 2 = 100 - 8 > 0.$$

$z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) + 24 = 0$ definieert ook een lijn, want hier

$$B^2 - 4AC = 10^2 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 > 0.$$

(b) Herschijf i als $-1 + (1 + i) = -1 + \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Volgens de definitie van cirkelspiegelingen, met $r = 2$:

$$f(i) = -1 + r^2\sqrt{2}^{-1}e^{i\pi/4} = -1 + 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = -1 + 2(1 + i) = 1 + 2i.$$

(c) Per definitie geldt voor $t \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in (0, \pi)$:

$$f(-1 + te^{i\theta}) = -1 + 4t^{-1}e^{i\theta} = -1 + 4/\overline{te^{i\theta}}.$$

In termen van $z = -1 + te^{i\theta}$ wordt dit $f(z) = -1 + 4/\overline{z+1}$. Dit kunnen we zien als samenstelling van de volgende stappen:

$$z \mapsto z + 1 \mapsto 1/\overline{z+1} \mapsto 4/\overline{z+1} \mapsto -1 + 4/\overline{z+1}.$$

Neem $f_1(z) = z + 1, f_2(z) = 1/\bar{z}, f_3(z) = 4z$ en $f_4(z) = z - 1$. Deze zijn allemaal van een van de gegeven types, en $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.