



WORTEL.DRUK

Het kloppend hart van de
wiskunde reünistenkring

De Wortel

nummer 1, maart 1999

Deze keer

- 2 Simon Stevin
- 4 Poincaré
- 5 Van drs. naar dr.
- 10 De mailinglist van De Wortel
- 11 Essenties: Schatten
- 12 Interview met Frans Keune
- 20 Cryptogram

Redactioneelkje

Dit blad is een periodiek, maar een nauwkeurige periode heeft de WORTEL.DRUK nog niet. Wel komt de WORTEL.DRUK *geregeld* uit, en dat willen we zo houden. Naast het uitbrengen van dit blaadje doet De Wortel meer: op 5 juni bent u van harte welkom op de eerste Wortelbarbecue. Nadere informatie volgt, maar schrijf het maar vast op.

Twan Laan, frisse kracht in het bestuur van De Wortel schreef in een voorstudie van dit berichtje:

Er is een boel te lezen in deze Wortel, en mede met behulp van het stukje hiernaast hoop ik dat ook het volgende nummer weer voldoende volume zal bevatten.

En volume, dat zit er met twintig pagina's zeker in.

In de hoogte

Een vraag is leuker naarmate er meer antwoorden op mogelijk zijn. Het soort antwoord dat iemand op zo'n leuke vraag geeft, geeft vaak ook een aardige indruk van het karakter van die persoon. Een vraag waarop dit zeker van toepassing is, is de volgende:

'Je wilt weten hoe hoog het Erasmusgebouw is en hebt alleen een barometer tot je beschikking. Hoe pak je dit aan?'

Het standaardantwoord neuzelt over luchtdruk en is daarmee ook het saaiste antwoord. Wie bedenkt de meeste alternatieve methodes?

Twan Laan

Simon Stevin - die vermaerde wiskonstenaer

Op 10 oktober hield Teun Koetsier een lezing over Simon Stevin (1548-1620). Het onderwerp was goed gekozen, dit jaar is een Stevinjaar, vierhonderd jaar na zijn geboorte.

Stevin leefde in een turbulente tijd. In 1579 werd de Unie van Utrecht opgericht, er was in die tijd in onze contreien een burgerlijke samenleving, waarin de adel weinig krachtig was. Na de ontdekking van Amerika werd de scheepvaart steeds belangrijker en dat was nu net iets waar men in de Lage Landen goed in was. Er werd in die tijd dan ook goed verdiend aan de handel, hoewel in die tijd het verschil tussen handel en piraterij niet altijd duidelijk was. Nederland begon zich te ontwikkelen en voerde oorlog tegen de bezetter Spanje.

Door de goede economische omstandigheden en de oorlog kwamen voor Stevin niet slecht uit, hij was namelijk een van de belangrijkste adviseurs van Mauritz. Zijn boek 'Wisconstighe Ghedachtenissen' was een verzameling lessen voor Mauritz. Ook in wetenschappelijk opzicht ging het goed in de Lage Landen, in 1574 werd de eerste universiteit, in Leiden, opgericht.

Stevin publiceerde in 1582 de Tafelen van Intrest, er was in een tijd zonder rekenmachines en met bloeiende handel veel vraag naar deze tafels, die door hard werken met de hand werden gemaakt. De makers beschermden hun tabellen dan ook door er foutjes in te zetten, zodat als iemand ze over zou schrijven hij door de mand zou vallen.

In *De Tiende* houdt Stevin een pleidooi voor het gebruik van het tientallig stelsel, niet alleen voor natuurlijke getallen, hetgeen al op begon te komen, maar vooral ook voor breuken. Zoals de titel ook al aangeeft is dit boek in het Nederlands geschreven, wat heel ongebruikelijk was voor die tijd. Stevin was dan ook een van de belangrijkste pleitbezorgers van het Nederlands in de wetenschap en in het bijzonder in de wiskunde (het woord wiskunde werd door Stevin populair gemaakt en misschien zelfs uitgevonden). Hij geloofde zelfs dat er vroeger in de 'wijzentijd', nog voor de Grieken, een volk had geleefd dat Nederlands sprak. De Grieken zouden ook een hoop kennis van deze wijzen overgenomen hebben.

Het Nederlands was volgens Stevin superieur voor het beschrijven van wetenschap en emotie. Hij geeft zelfs een groot aantal voorbeelden, waarin hij het Nederlands vergelijkt met andere talen, waarbij Nederlands er natuurlijk het beste uitkomt. Bijdragen van Stevin in de hedendaagse nederlands zijn bijvoorbeeld: evenredig, evenwijdig en evenbenig.

Behalve met wiskunde hield Stevin zich ook met natuurwetenschap bezig. Met zijn bollenexperiment (voor de zwaartekracht) was hij Galilei 3 jaar voor. Omdat hij liet zien dat de druk die vloeistof uitoefent op een oppervlak afhangt van de hoogte van de vloeistof en de oppervlakte van het oppervlak, werd hij wel de Archimedes van de Lage Landen genoemd. Hij

was erg trots op zijn bewijs dat de verhouding van de gewichten gelijk moet zijn aan de verhouding van tussen de lengten.

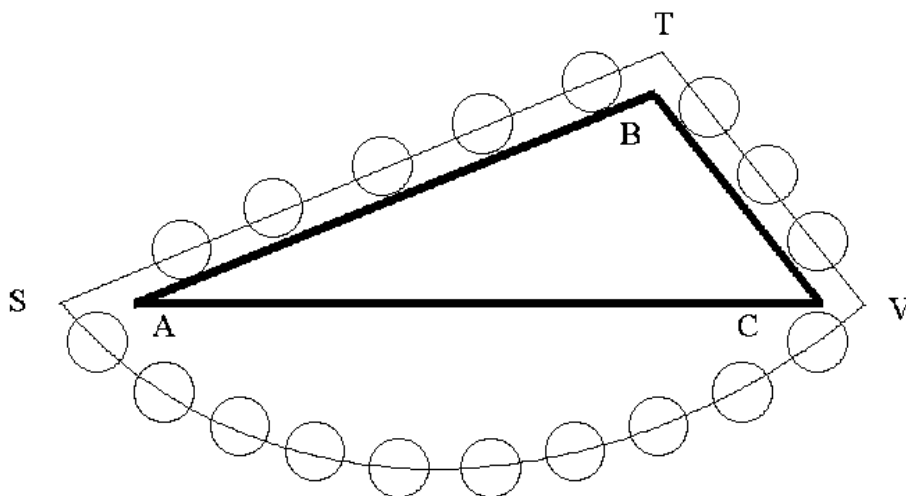
Het Cloutcrans-bewijs uit 'Beghinselen der Weeghconst'

Zijn bewijs uit het ongerijmde verloopt als volgt. Zij de driehoek ABC omhangen met een kralensnoer waarvan de kralen alle even zwaar zijn en zich op gelijke afstand van elkaar bevinden. We nemen aan dat het verbindende koord gewichtloos is en dat het snoer zich vrij kan bewegen om de punten S , T en V (zie afbeelding hiernaast). Omdat de kralen op gelijke afstand van elkaar staan, is het aantal kralen op elk van beide schuine zijden AB en BC evenredig met de lengte van die zijden. Welnu, nemen we eens aan dat de kralen op beide schuine zijden elkaar *niet* in evenwicht zouden houden. Dan moet het kralensnoer in beweging komen en dan zal al snel een toestand zijn bereikt waar de kralen precies één plaats zijn opgeschoven. Omdat de kralen even zwaar zijn, is daarmee de uitgangstoestand weer bereikt. Maar dat zou betekenen dat het snoer voortdurend in beweging zou blijven ('de cloten sullen uyt haer selven een eeuwich roersel maken, t'welck valsch is'). De slotsom dat de kralen in voortdurende beweging geraken, is het gevolg van onze aanname dat het snoer niet in evenwicht zou zijn en dus moet die aanname fout zijn. Stevin komt tot de slotsom dat het kralensnoer in rust blijft. Als we nu het gedeelte SV , dat aan beide uiteinden S en V immers even hard trekt, verwijderen, zal de toestand van rust behouden blijven.

Hiermee is ons bewijs voltooid.

De theorie wilde Stevin ook altijd toepassen, zo heeft hij een aantal verbeteringen aangebracht aan het paardenbit, heeft hij bijgedragen aan de beste opstelling voor legereenheden en introduceerde hij de zeilwagen in de Lage Landen.

Bas Spitters



Poincaré

Op de algemene reünistendag op 10 oktober gaf Professor ... Verhulst een boeiende beschrijving van het leven en de ideeën van de Franse wiskundige Henri Poincaré (1854-1912).

Henri Poincaré was een telg uit een geschoolde familie. Geïnspireerd door al die geleerdheid kwam hij terecht op de Ecole des Mines in Nancy waar hij in eerste instantie geweigerd was, net als Galois. Omdat hij details snel overzag, had hij de neiging veel gedachtestappen op papier over te slaan. Daardoor drong vaak niet door hoe intelligent hij eigenlijk was. Na toch toegelaten te zijn, voltooide hij in 1879 zijn wederom summiere proefschrift.

Het werk van Poincaré strekt zich uit over veel gebieden: differentiaalvergelijkingen, hemelmechanica, topologie, filosofie en meer. Op al deze gebieden heeft hij ook echt een stempel gedrukt.

In de hemelmechanica bestond het drielichamenprobleem, handelend over de interactie tussen aarde, maan en zon. Omdat er maar geen oplossing voor kwam, werd in de tweede helft van de negentiende eeuw een prijsvraag uitgeschreven. Deze werd in 1889 gewonnen door Poincaré. Ij narekening werd echter een fout gevonden. Poincaré herstelde zijn bewijs in een publicatie, bekostigd van zijn gewonnen geld, waarin hij bewees dat er echt chaotisch gedrag in het zonnestelsel plaats heeft.

In de differentieerbare variëteitentheorie heeft Poincaré een belangrijke rol gespeeld. Zijn vermoeden in de topologie heeft een flinke impuls gegeven aan het onderzoek in differentieerbare variëteiten:

Beschouw in $\mathbb{R}^4$ een compacte 3-dimensionale variëteit met de eigenschap dat elke cirkel in deze variëteit kan worden gedeformeerd tot één punt.

Dan is deze variëteit homeomorf met 'het' 3-dimensionale boloppervlak in de $\mathbb{R}^4$.

In 1960 is een tegenvoorbeeld voor dit vermoeden gevonden.

Poincaré kon zich niet vinden in het gebruik van filosofische systemen. Volgens hem word je door zo'n systeem gevangen in je eigen woorden. In plaats daarvan pleitte hij voor gezond verstand ondersteund door natuurwetenschappelijke zekerheden.

In zijn filosofische essays besteedde Poincaré aandacht aan het fenomeen wiskundige aanleg. Wiskunde is niet alleen logica, volgens Poincaré. Grote wiskundigen hebben de aanleg om het geheel te overzien. De draad niet kwijtraken is essentieel voor het doen van grote ontdekkingen. Die grote ontdekkingen deed Poincaré naar eigen zeggen op momenten dat hij juist

niet geconcentreerd was. Moeilijke theorie moet eerst in je onderbewustzijn verwerkt worden.

Verder onderstreepte Poincaré het belang van stijlverschillen onder wiskundigen. Intuïtieve wiskundigen als Riemann, die over Riemannoppervlakken dacht als ijzeren platen onder spanning, en theoretische wiskundigen als Weierstrass die bladzijden berekeningen publiceerde over een intuïtief schijnbaar eenvoudig probleem als de bissectrice, zijn beiden onmisbaar voor de ontwikkeling van de wiskunde.

Van drs. naar dr.

Ik ben in februari 1994 afgestudeerd. Daarna heb ik geprobeerd om als AIO bij wiskunde of informatica aan de slag te komen. Net toen ik in de tweede helft van augustus de hoop zo'n beetje had opgegeven en de enige reële manier om onder de dienstplicht uit te komen de universitaire lerarenopleiding leek te zijn, kreeg ik een brief van de sollicitatiecommissie van onze vakgroep met de mededeling dat men van plan was om mij per 1 september aan te stellen als AIO bij Algebra: veeltermafbeeldingen in zijn algemeen, het Jacobivermoeden in het bijzonder. Mijn officiële promotor werd prof. Levelt; mijn dagelijkse begeleider Arno van den Essen. In mijn geval bleek het woord 'dagelijks' behoorlijk terecht. De afgelopen jaren heb ik zeer intensief met Arno samen gewerkt. En als ik in dit verhaal dan ook spreek over 'wij' of 'ons' dan bedoel ik daar Arno en mijzelf mee. De rest van dit verhaal geeft een beschrijving van wat ik zoal gedaan heb tijdens mijn AIO-schap in Nijmegen. Ik zal proberen om zo min mogelijk specifieke algebratermen te gebruiken.

Zoals waarschijnlijk overal, ging het onderzoek — of in elk geval het vinden van bruikbare resultaten — bij vlagen goed. Mijn start was goed. Nadat ik in september begonnen was, was in november het eerste artikel klaar. Het meest verrassende aan dit artikel was misschien wel het feit dat we binnen twee maanden al bericht kregen dat het zonder wijzigingen was geaccepteerd. Kort daarop hebben we twee artikelen geschreven die sterk verband met elkaar hadden.

In het eerste artikel werd een nieuwe klasse geïntroduceerd, $\mathcal{H}_n(A)$ genaamd. Deze klasse was feitelijk een direct gevolg van mijn afstudeerscriptie. Bij die scriptie had ik een bepaald patroon ontdekt in een tweedimensionale ruimte; in dit artikel was dit uitgebreid naar willekeurige dimensies. Het tweede artikel ging over $\mathcal{D}_n(A)$, een bepaald systeem dat het mogelijk maakt om de elementen uit $\mathcal{H}_n(A)$ eenvoudig te beschrijven. Wat deze twee artikelen zo speciaal maakt is dat wij ze de nodige tijd geheim hebben gehouden. Hoewel wij de theorie in het voorjaar van 1995 al bedacht hadden, hebben wij deze artikelen pas in het voorjaar van 1996

ingeleverd om als technisch rapport te verschijnen. De reden hiervoor was dat wij met deze klasse een mooie voorsprong hadden op onze collega's in dit vakgebied. De grote kracht van deze theorie was dat wij een middel hadden waarmee wij willekeurig ingewikkelde veeltermafbeeldingen konden opschrijven en toch al meteen wisten dat zo'n ingewikkeld ding braaf inverteerbaar was. Dit betekende dat wij met het computeralgebrasysteem Maple in de gelegenheid waren om hele series kandidaattegenvoorbeelden te genereren en te controleren of bepaalde eigenschappen die deze afbeeldingen volgens belangrijke vermoedens moesten hebben inderdaad aanwezig waren. Vaak bleek dat niet het geval. Deze theorie is door collega's dan ook wel eens gekarakteriseerd als een 'vermoedenkraker'.

Zonder meer de belangrijkste ontdekking die we tijdens mijn promotie-onderzoek hebben gedaan, is de vondst van een tegenvoorbeeld voor het Markus-Yamabe vermoeden. Dit vermoeden staat bekend als het Jacobivermoeden van differentiaalvergelijkingen en was open sinds 1960. De manier waarop het gevonden is, is zeker de moeite waard om te vertellen. Via een nieuw artikel over wat later een oude vondst bleek, kregen we een methode aangereikt om een eigenschap van afbeeldingen te testen. Stellig overtuigd dat onze $\mathcal{H}_n(A)$ klasse ook deze eigenschap zou bezitten, probeerden we dit te bewijzen. Aangezien Arno naar Polen moest, mocht ik het in mijn eentje proberen. Zoals altijd probeerde ik eerst met de computer om bij willekeurige gevallen te bekijken wat er nu eigenlijk gebeurde. Alleen, wat bleek al snel, numerieke berekeningen gaven aan dat er bij voorbeelden uit onze klasse sprake was van een chaotisch gedrag. Kleine verschillen in de invoer hadden gigantische verschillen in de uitvoer tot gevolg. Deze ontdekking had tot gevolg dat we van strategie zijn veranderd: waarschijnlijk hadden onze voorbeelden de gewenste eigenschap niet! Kort daarop hebben we dat inderdaad kunnen bewijzen. Dit leverde een tegenvoorbeeld voor de discrete versie van het Markus-Yamabe vermoeden. Deze discrete variant was ons toegezonden door drie collega's uit Barcelona. Zelf hadden we het vermoeden dat ons voorbeeld zelfs het echte Markus-Yamabe vermoeden onderuit zou halen. Het bewijs hiervoor konden we echter niet vinden. We wisten het probleem te reduceren tot een bepaalde differentiaalvergelijking. Deze vergelijking was echter van een type waarvan het –ook volgens specialisten– niet mogelijk was om een algemene oplossing te vinden. Wij hebben ons toen niet goed genoeg gerealiseerd dat het voldoende was om één oplossing te vinden! Zodoende hebben wij de hulp van de eerder genoemde Spanjaarden nodig gehad om erachter te komen dat de eerste truc die bij differentiaalvergelijkingen wordt geleerd ook hier goed werkte: simpel wat e -machten invullen bleek voldoende om het 35 jaar oude vermoeden te kraken!

Na deze vondst in november 1995 moesten wij wel openbaar maken hoe de $\mathcal{H}_n(A)$ klasse er precies uitzag. Uit de gegeven voorbeelden viel die

structuur namelijk best goed af te leiden. En aangezien deze theorie een belangrijk onderdeel van mijn proefschrift zou gaan vormen, werd het tijd dat officieel werd vastgelegd dat wij de bedenkers van die theorie waren. Voor een proefschrift is het immers van groot belang dat er duidelijk origineel werk wordt gepresenteerd.

Dat het met ons tegenvoorbeelden-genereer-programma ook wel eens mis ging bleek later in mei 1996. Aangespoord door een bonus van 200\$, probeerden wij een geschikte afbeelding te vinden. Dat leek op een gegeven moment ook goed gelukt. Uit een al langer bekend voorbeeld van Drużkowski leken wij het gewenste voorbeeld te kunnen destilleren. Dit voorbeeld heeft zelfs tot een technisch rapport geleid. Helaas werden wij nog voordat het rapport echt verspreid kon worden onder de buitenlandse collega's, getipt door twee Italianen dat er waarschijnlijk iets niet helemaal goed zat met ons bewijs. Nadere inspectie leerde dan ook dat er ergens echt een grote denkfout werd gemaakt, die wij beiden telkens over het hoofd hadden gezien. Later heeft Arno dankzij een artikel van diezelfde Italianen toch zo'n tegenvoorbeeld kunnen vinden. Helaas was de bonus inmiddels ingetrokken.

Zoals al eerder gezegd, de grote ontdekkingen kwamen bij vlagen. Na deze foute vondst brak er een vrij stille tijd aan. Niet alleen werd er weinig schokkends gevonden, het was ook erg stil op mijn kamer. Mijn kamergenoot van het eerste uur, Dries Vermeulen, was in februari 1996 gepromoveerd. En hoewel Aimée Herczog formeel ook op mijn kamer werkte, kwam ik haar slechts eenmaal per week tegen. Zij gaf er namelijk de voorkeur aan om thuis te werken. In de praktijk kwam het er dan ook op neer dat ik alleen zat. En met name in de zomer van 1996 bleek dat nogal saai, want ook op de gang kwam ik wegens de vakantie weinig collega's tegen. Verder was het werk ook een beetje saai op dat moment; ik was bezig met een grote classificatie wat feitelijk niets anders betekende dan het oplossen van een groot stelsel vergelijkingen. Ik was dan ook behoorlijk blij toen de kamer per 1 september weer gevuld werd met twee nieuwe collega's: Mascha Honsbeek en Peter van Rossum.

Op wiskundig gebied heeft het echter nog wat langer geduurd voor er weer mooie resultaten gevonden werden. Pas in mei 1997 is de basis gelegd voor een nieuw hoofdstuk in mijn proefschrift. Ik was uitgenodigd om op een congres in Lincoln, Nebraska de resultaten van die classificatie uit de saaie zomer van 1996 te presenteren. Die uitnodiging klinkt natuurlijk behoorlijk gewichtig, maar wordt wat gerelativeerd door de mededeling dat Arno één van de organisatoren van het congres was. Shell Travel Services heeft overigens mijn vliegticket betaald. Een mooie service. Ik heb helaas horen zeggen dat dit programma inmiddels door Shell is geschrapt. Het fijne aan de service was overigens dat het helemaal geen probleem was om niet al-

leen naar de conferentieplaats Lincoln te vliegen, maar dat ik ook zonder problemen een tussenstop van een paar dagen in St. Louis mocht maken om daar enkele dagen met een bevriende collega, David Wright, te mogen werken. Samen met hem heb ik daar een methode gevonden om een afbeelding te herleiden tot een zogenaamde tamme afbeelding. Thuisgekomen is dit idee uitgewerkt tot een artikel. Maar dit was bepaald niet het enige idee dat in Amerika tot stand gekomen is. Ik herinner mij dat ik een lijst gemaakt heb van alle ideeën die ik daar heb gekregen en misschien wel tot iets moois konden leiden. Ik geloof dat er wel vijftien aandachtspunten op stonden. Uiteindelijk heb ik hier nog een stuk of vijf punten van kunnen uitwerken. Voor de rest was gewoon geen tijd meer.

In september 1997 ben ik nog naar een mini-conferentie in Turijn geweest. Deze conferentie was georganiseerd door de al eerder genoemde Italianen en was erg interessant. Ten eerste omdat mijn voordracht bepaald niet soepel liep en ik door de vragen duidelijke aanwijzingen kreeg hoe ik het verhaal beter op kon schrijven. Ten tweede werd deze conferentie afgesloten met een verblijf van anderhalve dag in de bergen op een paar uur rijden ten noorden van Turijn. Het was zeer leuk om eens op een heel andere manier met een stel wiskundigen om te gaan. Verder was het de eerste keer dat ik in de bergen gewandeld heb en ook dat is mij prima bevallen.

In de laatste maanden van 1997 heb ik nog samen met Arno enkele zaken geprobeerd snel op te lossen. Reden voor de haast hierbij was dat Arno per 1 januari naar Barcelona zou gaan om daar voor driekwart jaar te blijven. Helaas heeft het onderzoek geen echt nieuwe dingen meer opgeleverd in die periode. Dat wil zeggen, we vonden genoeg, maar dat waren vooral resultaten in de stijl van: we weten nu zeker dat we op deze manier geen tegenvoorbeeld kunnen vinden.

In januari 1998 ben ik dan ook begonnen met het uitschrijven van de eerder geschreven artikelen tot een mooi doorlopend verhaal dat proefschrift genoemd kon worden. Dat viel eerlijk gezegd erg tegen. Ondanks dat de originele artikelen best leesbaar waren opgeschreven heeft het mij toch bijna een half jaar gekost om de versie voor de manuscriptcommissie klaar te hebben. Voor een deel kwam dit overigens duidelijk door de begeleiding op afstand van Arno. Hij zat daar in Barcelona namelijk met een niet zo fijn werkend computersysteem. Zo was het bijvoorbeeld niet mogelijk om een PostScript versie van mijn verhaal naar Spanje te sturen om daar geprint te worden. Zijn lokale collega's kregen het niet voor elkaar om mijn files te printen. Zodoende heb ik gebruik moeten maken van het ouderwetse systeem: de PTT. En er was werkelijk geen peil op te trekken. Soms kwam mijn werk binnen drie dagen aan, soms was het er na twee weken nog niet. Gelukkig mocht ik in april een week naar Barcelona om daar eens met Arno het geschrevene door te nemen. De hoofdstukken die die week besproken zijn, zijn later nauwelijks nog veranderd. Het merendeel van de tijd na

mijn verblijf in Spanje is gespendeerd aan vele versies van een inleidend hoofdstuk.

Ik kan dan ook verzekeren dat ik ontzettend blij was op het moment dat ik in juni bij de pedel mocht komen om een afspraak te maken voor de promotie: het proefschrift was af. In de tijd dat de commissie zich over mijn manuscript heeft gebogen, heb ik niet zo heel veel aan onderzoek gedaan. Het oordeel van de commissie was mild. Slechts één commissielid wenste nog enkele aanpassingen. Dat kwam zeer goed uit; waarschijnlijk was ik niet in staat geweest om nog veel wijzigingen door te voeren. Sinds eind juli ben ik ziek: hyperthyreoidie. Een ziekte die er voor gezorgd heeft dat ik door chronische vermoeidheid nauwelijks iets kon doen. Het heeft er zelfs even naar uitgezien dat het fysiek niet mogelijk was om een uur *staand* mijn proefschrift te verdedigen. Gelukkig hielpen de medicijnen die ik kreeg redelijk. Op 11 november was ik fit genoeg om de verdediging te houden. De dagen direct daaraan voorafgaand hadden de zenuwen toch behoorlijk vat op mij gekregen. Niet dat ik bang was niet goed door de verdediging te komen, maar er blijft toch iets van onzekerheid: als de commissie wil kan zij het je behoorlijk moeilijk maken. Die angst bleek niet helemaal onterecht. De eerste opponent was tien minuten bezig om mijn eerste hoofdstuk af te kraken. Niet geheel onterecht overigens, maar erg blij was ik er duidelijk niet mee. Gelukkig kon ik bij de overige zes vragenstellers en met name bij de drie experts uit het buitenland, wel goede antwoorden geven. Het is alleen de vraag of dat ook bij het niet-wiskundige publiek is overgekomen.

Al met al viel de verdediging best mee. Dat uur was verrassend snel voorbij. Ook al heb ik horen fluisteren dat de pedel met opzet een minuut te laat kwam met zijn 'hora est' om in elk geval het laatste lid uit de commissie zijn vraag te laten stellen. Minpuntje was dat men mij een verkeerde bul heeft gegeven. Ik kreeg een bul met daarop de tekst 'disciplinae physicae' in plaats van 'disciplinarum mathematicarum et informaticarum'. Gezien de recente fusie tot de faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica, had ik eigenlijk natuurlijk een bul moeten krijgen waar die drie gebieden allemaal op staan. Maar om de een of andere reden heeft men bij de KUN besloten dat het niet nodig was om voor de nieuwe faculteit ook nieuwe bullen te maken... Inmiddels heb ik mijn verkeerde bul ingewisseld tegen een betere; een goede is het eigenlijk nog steeds niet. Alleen staan er nog geen handtekeningen op; die mag ik nu zelf zien te achterhalen. Maar ik denk dat dat wel gaat lukken...

Engelbert Hubbers



Onze bijeenkomst op de algemene reünistendag

De mailinglist van De Wortel

De Wortel bezit een eigen mailinglist, `deWortel@nic.surfnet.nl`. Deze lijst is bedoeld als forum voor De Wortel. Er kan geschreven worden over alle onderwerpen die met De Wortel en wiskunde te maken hebben, bijvoorbeeld:

- Wat was ook al weer de formule van Cardano en waar gebruik je hem voor?
- Ik zoek een baan/stageplaats
- Ik ben mijn jaargenoot uit het oog verloren, weet iemand hoe het hem/haar verlopen is?
- De Wortel moet meer borrels met worteltaart organiseren! (Welles/Nietes)
- ...

Het is alleen voor leden van De Wortel mogelijk om zich te abonneren op de mailinglijst en alleen abonnees kunnen berichten naar de lijst sturen. Onze lijst is dus vrij besloten.

Om abonnee te worden stuurt u een e-mail aan

`Listserv@nic.surfnet.nl`

met in het bericht

subscribe deWortel Voornaam Achternaam

Daarna krijgt u vanzelf aanwijzingen voor de volgende stappen toegestuurd.
Dit kan misschien even duren.
Als u abonnee bent, kunt u berichten sturen naar deWortel@nic.surfnet.nl.

Essenties: Schatten

Terug in Nederland wordt er vaak tegen mij gezegd 'Nou jij hebt toch maar geluk, je ziet zoveel van de wereld'. Ja, dat is waar, maar veel belangrijker voor mij zijn, behalve de vele wiskundige contacten, de 'schatten' die ik uit 'den vreemde' meebreng. Ik zal hieronder uitleggen wat ik daarmee bedoel. Thor Heijerdaal, de beroemde Noorse ontdekkingsreiziger, zei het al zo duidelijk 'You can not buy a ticket to paradise, you have to find it in yourself'.

Zo was ik in 1995 een paar weken in Polen en reed met mijn Poolse collega Ludwik Drużkowski op een tweebaans autoweg. Als er ingehaald moest worden was er helemaal geen probleem, ieder ging een beetje opzij en de inhaler kon zonder problemen voorbij. Toen zag ik ineens dat er een Nederlandse vrachtwagen voor ons reed. Ik zei tegen Ludwik: 'wedden dat hij niet opzij gaat'. En zo gebeurde het ook. Ik heb ervan geleerd opzij te gaan als er op een fietspad een spookrijdende fietser mij tegemoet komt. Waarom op je 'recht staan'... er is immers plaats genoeg.

Dat laatste kun je weer niet zeggen in Hong Kong, waar in het centrum zo'n 2 miljoen mensen op een vierkante kilometer wonen!! Het lawaai is dag en nacht enorm. Ik woonde op de zestiende verdieping en kon alleen slapen tussen 1 en 6 uur 's morgens omdat dan het lawaai van het vrachtverkeer wat minder is. Dan waardeer je hoe rustig het hier in Nijmegen is! Het verbazingwekkendste (voor mij) was overigens dat er op zo'n 5 minuten lopen van mijn flat (en dus ook van een heleboel andere hoge flats) een prachtig heerlijk rustig bergachtig natuurgebied lag waar bijna niemand kwam (behalve wat oude mensen die er Tai Chi deden).

In de zomer van 1994 gingen we na afloop van een congres op Curaçao naar Brazilië. Op het beroemde strand van Copacabana vond ik weer een andere schat. Het was voor mij een groot genot om daar op het strand te liggen omringd door de allermooiste meisjes gekleed in flosbadpakjes. De ene was nog mooier dan de ander. Ik kwam ogen te kort. Maar na enkele dagen van dit teveel aan schoonheid drong het tot mij door dat alleen uiterlijke schoonheid al snel begint te vervelen en besepte ik hoe rijk ik was met mijn eigen Zuid-Amerikaanse vrouw!

Arno van den Essen

Interview met Frans Keune

Op 9 december van het afgelopen jaar spraken we met Frans Keune, sinds september 1997 hoogleraar Algebra aan de KUN. Bij de professor thuis ging het vooral over allerlei reacties op uitspraken die hij deed tijdens zijn oratie[1]. Hij blijkt een knuppel in het hoenderhok van de wiskunde-onderwijs-ontwikkelaars gegooid te hebben. Menige ontwikkelaar leek zich door de Nijmeegse wesp gestoken te hebben gevoeld. Opmerkelijk is ook dat er uit de hoek van de andere disciplines (niet- β -vakken) geluiden van instemming komen met de opvatting en de plannen van Keune

U bent hoofd van de Wiskundeschool in Nijmegen, zoals u dat zelf wel eens aanduidde. In het basisonderwijs vinden sommige schoolhoofden dat ze hun werk niet naar behoren kunnen doen en lopen, in het ergste geval, zelfs weg. Zijn er overeenkomsten tussen hun positie en die van u? Keune zegt dat hij vergelijkbare problemen tegenkomt. Het is een rare tijd om schoolhoofd te worden; wat de regelgevers schoolhoofden willen laten doen is soms moeilijk uitvoerbaar. Soms moet er al met de uitvoering van een nieuw programma begonnen worden voordat de toestemming binnen is. Inhoud en vorm van het onderwijs zijn bronnen van grote zorg. Gelukkig heeft dit schoolhoofd niet ook nog eens de zorg voor de reparatie van het lekkende dak, daar zitten directeurs op de basisscholen ook nog eens mee.

In de oratie kondigde Keune plannen aan met betrekking tot het ontwikkelen van leerstof die qua aard en inhoud beter aanspraak kan maken op het predicaat 'wiskunde', dan de leerstof die in de meest gangbare boeken voor het vwo staat. Die laatste kan misschien het beste als 'rekenen' worden beschreven. Onze vraag was natuurlijk: 'Hoe staat het met de plannen en de uitvoering ervan?' Er is een tijdje geleden een overleg op gang gekomen tussen bedrijfsleven en overheid (Economische Zaken) om te kijken hoe scholieren aangemoedigd kunnen worden om te kiezen voor een β -studie. Deze partijen hebben beide 40 miljoen gulden op tafel gelegd en hebben de stichting AXIS opgericht. AXIS financiert projecten met een regionaal karakter waarin wordt samengewerkt met het bedrijfsleven. Toen Keune AXIS voorstelde om een project te starten voor de ontwikkeling van een vwo-curriculum in de geest van zijn oratie, klonk er dan ook enige scepsis. Men kon zich niet goed voorstellen hoe het bedrijfsleven hieraan kon meewerken. Later bleek het bedrijfsleven de problemen juist wel in te zien, en minder geïnteresseerd in inhoudelijke bemoeienis, maar voornamelijk in het resultaat: een hoge kwaliteitsstandaard van het onderwijs en voldoende studenten.

Vanuit het Wiskundige Genootschap en de Vereniging van Wiskundeleraars zijn intussen ook steunbetuigingen gekomen. Er wordt een groepje van geestverwanten gevormd om de plannen uit te werken. Daarin zitten naast Keune bijvoorbeeld Barendregt en Van der Craats. Beide zijn ook

actief binnen de stichting Vierkant die probeert jonge kinderen voor wiskunde te enthousiasmeren. De werkgroep coördineert een aantal promotieactiviteiten voor wiskunde in Nederland, bijvoorbeeld de Olympiaden en Kangoeroe.

Al snel gaat het gesprek verder over het vwo. Met name over de discussie over de vraag of iedereen ('ook alpha's?!' wordt er vaak aan toegevoegd) wiskunde voorgeschoteld moet krijgen. Keune vindt dat misschien niet iedereen, maar zeker een substantieel deel van de vwo-leerlingen serieus wiskunde moet doen. Dit geldt ook voor de onderbouw, anders zullen er waarschijnlijk nog maar weinig leerlingen op een voldoende hoog niveau zitten om het profiel 'Natuur & Techniek' in te stromen. Voldoende instroom in dit profiel is belangrijk voor zowel de exacte wetenschappen aan de universiteit, als voor het bedrijfsleven.

Leerlingen moeten inzien dat wiskunde niet een verzameling truuks en regeltjes is, maar een samenhangend bouwwerk waarbij de ene laag logisch volgt op de andere. Om leerlingen dit te laten zien moeten leraren een zo groot overzicht over de stof hebben, dat ze zelf de leerstof op papier zouden kunnen zetten. Ze zullen er geen tijd voor hebben om dat te doen, maar vanuit zo'n vakkennis kunnen ze wel heel kritisch tegenover de teksten uit de schoolboeken staan. Zonodig moeten leraren nascholing krijgen.

En zo komt ons gesprek bij het studiehuis uit. Van achter zijn donkere snor verlaagt Keune zijn spreektoon en spreekt dan nadrukkelijk zijn zorgen en pessimisme uit over de nieuwste scheut aan de onderwijs(vernieuwings)boom. Met name de volstrekt onvoldoende voorbereiding die de leerlingen uit de basisvorming in de eerste jaren krijgen, baren hem veel zorgen. Leerlingen met talent worden niet voldoende uitgedaagd. Hoewel er in het studiehuis misschien wat mogelijkheden zijn voor differentiatie zal daar lang niet altijd tijd voor zijn. Het niveau van bewijsvoeren in het laatste halve jaar is vergelijkbaar met dat uit de vlakke meetkunde in het eerste jaar vroeger.

Het is bekend dat het Freudenthalinstituut een flinke vinger in de pap heeft in het wiskundeonderwijs in Nederland. De Lange, directeur van het instituut, was niet erg vriendelijk in zijn reactie op u stuk in het NRC Handelsblad. Hoe is de relatie intussen? Op verzoek van de Nieuwe Wiskrant[2], een uitgave van het Freudenthalinstituut, heeft Keune zijn ideeën nog eens op een rijtje gezet. De reactie daarop was in ieder geval een stuk netter.

In het Septembernummer van de Nieuwe Wiskrant[3] schrijft De Lange nog eens over het succes van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Hij voert daarbij aan dat nederlandse scholieren in internationale onderzoeken hoog scoren. Een argument dat Netelenbos ook gaf in het NRC Handelsblad. Dit is inderdaad het geval, alleen zijn er twee verschillende onderzoeken geweest, grofweg een voor rekenen en een voor wiskunde. In het eerste onderzoek scoorden nederlandse scholieren inderdaad hoog, maar aan het tweede onderzoek is door Nederland vreemd genoeg niet meegedaan. Dit

lijkt aardig over een te komen met de kritiek van Keune. Rekenen kunnen we wel in Nederland, maar laten we het dan alstublieft geen wiskunde noemen. Een pikant detail is nog dat De Lange in het artikel een voorbeeld uit de verkeerde test laat zien.

De eerstejaars studenten bij wiskunde komen in overgrote meerderheid direct van de middelbare school. In Nijmegen is in september een twintigtal studenten aan een wiskundestudie begonnen. Er is veel energie van docenten vereist om de geschikte studenten binnen de boot te houden. De stap van het vwo naar de universiteit is groot. Er zijn zelfs studenten bij voor wie wiskunde een negatieve keuze is. Op school was wiskunde het vak waar ze weinig aan hoefden te doen en waar ze goede resultaten voor haalden. Vanuit die sfeer werkend lopen ze binnen de kortste keren vast.

Door het teruglopen van de voorkennis van de eerstejaars studenten is het erg belangrijk dat er voor de exacte vakken, ook op de algemene universiteiten een extra (vijfde) jaar bij komt. Waarschijnlijk zal de minister daar in juni zijn goedkeuring aan geven, nadat hij (of eigenlijk zijn voorganger) dat al deed voor de technische universiteiten.

Door zo'n vijfde jaar komt er in de studie ruimte voor bijvoorbeeld een studentencolloquium en een modellenpracticum. Op deze manier worden oefeningen in communicatieve vaardigheden in dienst van de wiskunde gesteld en niet als oefening voor de oefening gebracht.

De faculteit biedt de mogelijkheid een gamma-afstudeervariant te doen. Dit 'management gedoe' is niet door de wiskundigen bedacht, maar misschien wordt het nog wel wat. Een andere variant is de opleiding tot leraar, of de communicatieve variant, waarin het theoretische gedeelte van de lerarenopleiding wordt opgenomen. Het praktische gedeelte, de stage, zullen de studenten na het afstuderen moeten voltooien.

Na dit interview hebben wij in ieder geval een indruk waar dit schoolhoofd zich mee bezig houdt. En we zijn blij dat hij zich daarnaast niet met een lekkend dak bezig hoeft te houden. Hoewel, er zijn plannen voor nieuwbouw van de β -faculteiten, maar dat is een ander verhaal...

Wij danken de aanwezige leden van de familie Keune voor de gastvrijheid en de prettige ontvangst.

Bas Spitters en Jan Cuijpers.

[1] <http://www.sci.kun.nl/math/~keune>

[2] Nieuwe Wiskrant 17-4/juni 1998

[3] Nieuwe Wiskrant 18-1/september 1998

De Oude Worteltrektruc

De Wortel wordt ook al als vraagbaak gezien. Een door Peter Mulder gestelde vraag (“Hoe ging dat worteltrekken ook alweer?”) kreeg een (beknopt) antwoord dat misschien anderen ook interesseert, en dat daarom hier een uitgewerkte vorm krijgt.

1. Voorbeelden.

Eerst twee voorbeelden, om er een beetje in te komen. (Ik begrijp dat in de schoolwiskundeboeken de ‘uitleg’ zich helaas vaak tot voorbeelden beperkt: je ‘ziet dan wel’ hoe het gaat, punt. Maar zo zie je niet waarom het in de wiskunde (zo) gaat.)

Wat is de wortel uit 33039504? Verdeel het getal in groepen van twee cijfers, van rechts naar links: 33|03|95|04. Vier groepen, dus de wortel heeft vier cijfers voor de komma, want de kwadraten van de getallen met vier cijfers (steeds is daarmee bedoeld: vóór de komma) zijn de getallen met zeven of acht cijfers ($10^3 \leq X < 10^4 \iff 10^6 \leq X^2 < 10^8$).

1. Neem de linkergroep (33) en bepaal het grootste (vanzelf eencijferige) getal a met $a^2 \leq 33$, $a = 5$ dus. Dat cijfer is het linkse cijfer van de wortel. (Hier zat een probleempje: een cijfer en het erdoor voorgestelde getal zijn verschillende dingen. Hier is nog geprobeerd ze netjes uit elkaar te houden. Het schrijft vlotter als je dat niet doet, en we vertrouwen in het vervolg maar erop dat de bedoeling uit de context duidelijk is.) Trek $a^2 = 25$ van de eerste groep af en hang er dan de tweede groep achter: 803.
2. Verdubbel a : 10. Zoek nu het grootste cijfer b waarvoor $10b \times b \leq 803$. (Met $10b$ is niet het product $10 \cdot b$ bedoeld maar het getal geschreven met de cijfers 1,0 en b !) Die b is 7 en $107 \times 7 = 749$. Dan is 7 het tweede cijfer van de wortel, die dus eruit ziet als $57 \cdot \dots$. Doe $803 - 749 = 54$ en hang er de derde groep achter: 5495.
3. Verdubbel ab : 114. Zoek nu het grootste cijfer c waarvoor $114c \times c \leq 5495$. Die c is 4 en $1144 \times 4 = 4576$. Doe $5495 - 4576 = 919$ en hang er de vierde groep achter: 91904.
4. Verdubbel abc : 1148. Zoek nu het grootste cijfer d waarvoor $1148d \times d \leq 91904$. Die d is 8 en $11488 \times 8 = 91904$. Doe $91904 - 91904 = 0$. Niets over, dus de wortel is 5748.

Dadelijk in het tweede voorbeeld zit een komma, maar dat deert ons niet; je kunt een komma immers ook bv. zes plaatsen naar rechts schuiven en later in de “uitkomst” weer drie plaatsen naar links. Daarmee zien we ook alvast dat we bv. 3 kunnen behandelen als 3,000..., en “gewoon” na de komma doorgaan. Te vermoeden valt dat we zo $\sqrt{3}$ steeds beter benaderen. (Even oefenen, met 30000. Begin met 1, ($1^2 = 1$). Rest $3 - 1 = 2$, wordt 200. Eraf

kan $27 \times 7 = 189$. Rest 11, wordt 1100. Eraf kan $343 \times 3 = 1029$. Benadering van $\sqrt{30000}$ dus 173, van $\sqrt{3}$ dus 1,73. Het volgende cijfer is in dit geval 2; zou dat bv. 6 zijn dan is onze benadering niet de juiste afronding!)

Het tweede voorbeeld schrijven we op als een soort staartdeling. De wortel uit 6304,36?

Getal in behandeling	Bereken cijfer	Dan is	Trek eraf	Wordende wortel (dubbel)
6304,36 – 49 , —	$a^2 \leq 63$	$a = 7$	$7^2 = 49$	7 (14)
1404, – 1341, —	$14b \times b \leq 1404$	$b = 9$	$149 \times 9 = 1341$	79 (158)
63,36 – 63,36 —	$158, c \times 0, c \leq 63,36$	$c = 4$	$158,4 \times 4 = 63,36$	79,4
0				

2. Verantwoording.

Nu de verklaring. Die bleek notationeel nogal lastig. Ik moet bekennen dat ik zelden zo'n moeite heb gehad iets toch niet zo moeilijk behoorlijk op te schrijven. De verleiding was daarom groot het bij voorbeelden te laten, maar na mijn opmerkingen hierboven kon dat natuurlijk niet. Het probleem is dat in de procedure wordt gemanipuleerd met de cijfers van een getal; bijvoorbeeld $340^2 = 115600$ aftrekken van $A = 122445$, resultaat 121289, zullen we gaan uitvoeren als: trek eerst 3^2 af van de eerste groep, dus 300^2 van A, en dan nog 64×4 , dus $(2 \cdot 30 + 4) \cdot 4$, van de eerste twee groepen; inderdaad: $300^2 + 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 = (30 + 4)^2$.

Ik vertel het twee keer. Onder 3 wat concreter, met een, weliswaar willekeurig, getal van zeven of acht cijfers, onder 4 echt algemeen. De lezer kan nu “zappen”: i) sla 3 over of ii) lees 3 en geloof 4 wel of iii) lees eerst 3 om dan 4 beter te snappen of iv) ga wat anders doen.

Een kleine cursieve letter stelt een cijfer voor, met $abcd$ of $a_1a_2a_3a_4, a_5a_6$ wordt dan een getal van vier (of minder) cijfers (steeds is bedoeld: vóór de komma) aangeduid. Hoofdletters stellen getallen voor. We onderstellen steeds dat ons getal iets $\neq 0$ vóór de komma heeft; geen bezwaar want met de komma mogen we (een even aantal plaatsen) schuiven.

3. Half Bewijs.

Laat $A = pqrstuvw, \dots$ een getal van 7 of 8 cijfers (voor de komma!) zijn (dus $p \neq 0$ of $q \neq 0$). Zijn wortel $W = \sqrt{A}$ is dan van de vorm $abcd, \dots$, $a \neq 0$, zoals we al opmerkten. Nu is

$$a000 \leq W < a000 + 1000 \text{ omdat } bcd, \dots < 1000;$$

dus

$$(a \cdot 1000)^2 \leq A < ((a + 1) \cdot 1000)^2$$

en dus

$$a^2 \leq pq, rstuvw \dots < (a + 1)^2.$$

Zelfs, omdat het linkerlid geheel is,

$$a^2 \leq pq < (a + 1)^2.$$

Dus is a het grootste (steeds bedoeld: gehele) getal met kwadraat $\leq pq$, het eerste cijfer van de wortel is bepaald door de eerste twee van A . Ook is $ab00 \leq W < ab00 + 100$, dus

$$(ab \cdot 100)^2 \leq A < ((ab + 1) \cdot 100)^2.$$

$$\text{Daaruit weer } (ab)^2 \leq pqrs < (ab + 1)^2.$$

Dus b is het grootste cijfer x met

$$(ax)^2 \leq pqrs$$

$$\text{ofwel met } 100a^2 + (20a + x)x \leq pqrs,$$

dus met

$$(20a + x)x \leq pqrs - 100a^2.$$

Het rechterlid R vinden we door a^2 van pq af te trekken (geeft $p'q'$) en dan de volgende groep rs "aan te halen": $p'q'rs$.

Is $2 \cdot a$ in cijfers a_1a_2 , dan is in het linkerlid $20a + x = a_1a_2x$, en we vinden b als de grootste x met $a_1a_2x \times x \leq R$. Trek $a_1a_2b \times b$ af van $p'q'rs$ (geeft $p''q''r's'$), dan is in totaal van $pqrst$ afgetrokken $100a^2 + 20a \cdot b + b^2 = (10a + b)^2 = (ab)^2$. Haal tu aan: $p''q''r's'tu$.

Nu wat sneller: $(abc)^2 \leq pqrst < (abc + 1)^2$, dus c is het grootste cijfer y met $(aby)^2 \leq pqrst$ ofwel met $(100a + 10b)^2 + (200a + 20b + y)y \leq pqrst$, dus met $(200a + 20b + y)y \leq pqrst - (100a + 10b)^2$. Het rechterlid R' is $pqrst - (ab0)^2$ en dat is juist $p''q''r's'tu$. Is $2 \cdot ab$ in cijfers

$b_1b_2b_3b_4$, dan is c dus de grootste y met $b_1b_2b_3b_4y \times y \leq R'$.

Nu nog sneller, en hopelijk voldoende om het algemene principe te verklaren. Trek $b_1b_2b_3b_4c \times c$ af van $p''q''r's'tu$ en haal aan, geeft $p'''q'''r'''s'''t'u'vw$, wat precies $pqrstuvw - (abc0)^2$ is. Verdubbel abc en zet er z achter, geeft $20 \cdot abc + z$. Neem voor d de maximale z met $(20 \cdot abc + z)z \leq pqrstuvw - (abc0)^2$, dat is met $(abcz)^2 \leq A$, dan is $abcd$ het deel van $\sqrt{A}$ voor de komma. Verdere precisie door voorbij de komma te gaan (bij een geheel getal met groepen 00).

4. Verhoopt Bewijs.

We hebben al gezien: de kwadraten van de getallen met r cijfers (vóór de komma) zijn die met $2r$ of $2r - 1$ cijfers.

Lemma. Laat $A = a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_1a_0, \dots$ een getal met $2k + 1$ of $2k + 2$ cijfers zijn. Laat $W = \sqrt{A} = c_kc_{k-1} \dots c_1c_0, \dots$. Dan is, voor $j = 0, 1, \dots, k$, $c_k \dots c_{j+1}c_j$ het grootste getal met kwadraat $\leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j}$.

Bewijs. Bedenkend dat $0 \leq c_{j-1} \dots c_1c_0, \dots < 10^j$ zien we:

$$c_k \dots c_{j+1}c_j \cdot 10^j \leq \sqrt{A} < c_k \dots c_{j+1}c_j \cdot 10^j + 10^j.$$

Deel door 10^j en kwadrateer:

$$(c_k \dots c_{j+1}c_j)^2 \leq A \cdot 10^{-2j} < (c_k \dots c_{j+1}c_j + 1)^2.$$

Nu is $A \cdot 10^{-2j} = a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j}, a_{2j-1}a_{2j-2} \dots a_0$ en omdat $(c_k \dots c_{j+1}c_j)^2$ geheel is is zelfs

$$(c_k \dots c_{j+1}c_j)^2 \leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j} < (c_k \dots c_{j+1}c_j + 1)^2. \quad \square$$

Dit is natuurlijk de reden waarom we de wortel kunnen vinden door “van links af” te werken met groepen van twee.

Met A als in het Lemma en $j = k$ weten we nu al dat we het eerste cijfer c_k van $\sqrt{A}$ vinden door de grootste x met $x^2 \leq a_{2k+1}a_{2k}$ te nemen. Stel we hebben een beginstuk $c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}$ van de wortel al gevonden. Voor het volgende cijfer x moet dan volgens het Lemma gelden: x is het grootste cijfer met

$$(c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}x)^2 \leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j}.$$

Herschrijf:

$$(c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}0 + x)^2 \leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j}$$

$$(c_k \dots c_{j+2}c_{j+1})^2 \cdot 100 + (2 \cdot c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}0 + x)x \leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j}$$

$$(2 \cdot c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}0 + x)x \leq a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \dots a_{2j} - (c_k \dots c_{j+2}c_{j+1}0)^2.$$

Links herkennen we het verdubbelen van het gevonden stuk wortel gevolgd door x erachter en vermenigvuldigen met x . Wat staat rechts als we er nog even $2j$ nullen achter denken?

$$a_{2k+1}a_{2k}a_{2k-1} \cdots a_{2j}10^{2j} = a_{2k+1}a_{2k}10^{2k} + a_{2k-1}a_{2k-2}10^{2k-2} \\ + \cdots + a_{2j+1}a_{2j}10^{2j}$$

verminderd met

$$(c_k \cdots c_{j+1}0)^2 10^{2j} = (c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_{j+1} 10^{j+1})^2 \\ = c_k^2 10^{2k} + (2c_k 10 + c_{k-1})c_{k-1} 10^{2k-2} \\ + (2c_k 10^2 + 2c_{k-1} 10 + c_{k-2})c_{k-2} 10^{2k-4} + \cdots \\ + (2c_k 10^{k-1} + 2c_{k-1} 10^{k-2} + \cdots + c_{j+1})c_{j+1} 10^{2j+2}.$$

Het rechterlid kan dus worden verkregen door het aantal 10^{2k} -tallen van A (de eerste twee cijfers) met c_k^2 te verminderen, dan het aantal 10^{2k-2} -tallen (de eerste vier (nieuwe) cijfers) met $(2c_k 10 + c_{k-1})c_{k-1}$, $\dots$, het aantal 10^{2j+2} -tallen (de eerste $2(k-j)$ cijfers) met $(2c_k 10^{k-1} + 2c_{k-1} 10^{k-2} + \cdots + c_{j+1})c_{j+1}$, en tenslotte nog de volgende groep $a_{2j+1}a_{2j}$ van twee cijfers toe te voegen. Maar dit zijn precies de eerste $2(k-j+1)$ cijfers van het getal dat we overhouden als we, voor $l = k, k-1, \dots, j+1$, telkens na het vinden van c_l ons oude wortelstuk $c_k \cdots c_{l+2}c_{l+1}$ van lengte $k-l$ (bij de start is $l = k$) hebben verdubbeld, c_l erachter hebben gezet, met c_l hebben vermenigvuldigd en het resultaat hebben afgetrokken van wat nog restte van de eerste $2(k-l+1)$ cijfers van A .

5. Opgave.

Bepaal de wortel uit 102030405060708090807060504030201, zowel met de hand als met een machien(tje).

R.H. Jeurissen

Colofon

WORTELinDRUK is de nieuwsbrief
van Wiskunde Reünistenkring

De Wortel

redactie: Mignon Engel, Jeroen Hendrix, Bas Spitters
maart 1999

jaargang 2 nummer 1

aan dit nummer werkten mee: Jan Cuijpers, Francien Dechesne, Arno van den Essen, Engelbert Hubbers, Ruud Jeurissen, Twan Laan

Cryptogram

Vul de oplossingen van de omschrijvingen in (bovenste diagram). Gebruik vervolgens de getallen om het gemompel van Remco Campert te ontcijferen.

A	10	82	41	63	49														
B	15	8	92	100	20	43	98	50											
C	57	68	69	21	95	70	5	34											
D	60	46	47	82	66	86	54	35	93										
E	62	18	44	96	72	26	57	65	51										
F	29	84	3	72	1	67	31	48	56	11									
G	42	2	46	100	4	36	64	32	88	61									
H	74	76	5	32	79	16	17	86	90	12	36								
I	26	53	46	95	7	20	96	38	89	9	59	15							
J	82	90	50	30	30	6	93	22	81	96	54	89	25						
K	29	78	88	80	93		28	45	75	22	18	87	23	35	81				
L	27	97	4	21	13		76	46	3	38	83	25	19	2	58				
M	85	99	48	71	51	75	58	84	40	25	23	29	69	53	27	52			
N	71	78	33	39	67	16	40	44	22	17	47	94	76	55	91	25			
O	71	57	96	16	14	47	87	77	48	24	77	41	86	39	13	96	34	37	3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100								

- A) In de prehistorie, en op warme zomerdagen. (5)
- B) Maalstof is de onaangename bijkomstigheid (8)
- C) Verkeerd karakter (8)
- D) Albers, Postema en ‘lieverd’ (9)
- E) (Negatieve) cijfers voor de voedvrouw (9)
- F) Schurk heeft minder goed ego (10)
- G) Doodstraf in Holland (10)
- H) Sapje voor de baby (11)
- I) Voornamelijk de business manager (12)
- J) (De standpunten van) Fermat en Pythagoras (13)
- K) (Misleidende) acties van de lichttechnicus (15)
- L) Lachwekkende slips of the tongue (15)
- M) De geest van de groeiende haast zit in de auto (16)
- N) “Lul”, “fuck” en “omheining” (16)
- O) Tegen verval van perrons en reishonger (19)

Francien